1) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

2) $|a| = \begin{cases} a, & \text{երբ } a>0 \\ -a, & \text{երբ } a<0 \end{cases}$ Օրինակ $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$ $|a| \geq 0$ [illegible]

3) $(a+b)$-ի հակադիրը ([illegible]) $(a-b)$-ն է, $(a-b)$-ինը՝ $(a+b)$-ն:

$(a-b)^2 = (b-a)^2$

5) $a \cdot b = 0 \iff$ կամ $a=0$, կամ $b=0$

$\frac{a}{b} = 0 \iff a=0$ երբ $b \neq 0$:

6) Կոտորակի հայտարարում 0 լինել չի կարող

7) [illegible]

8) $y=f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը [illegible] $D(y)$: [illegible] $E(y)$:

9) Զույգ թվի ընդհանուր տեսքը՝ $2k$ կամ $2b$ կամ $2n$

Կենտ թվի ընդհանուր տեսքը՝ $2k+1$ կամ $2m+1$ կամ $2b-1$

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, $a^n \cdot a^{-n} = 1$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1$

11) $x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ կամ $x \in [-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$ $(a \geq 0)$

$x^2 \geq a \iff x \leq -\sqrt{a} \cup x \geq \sqrt{a}$ կամ $x \in (-\infty; -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}; \infty)$

12) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \iff x \leq -a \cup x \geq a$

Գծային ֆունկցիա

Ընդհանուր տեսքը $y = kx + b$

$k = tg\alpha$

k — կոչվում է անկյունային գործակից

b — ազատ անդամ

Գրաֆիկը ուղիղ գիծ է:

Հետևություն $y = kx+b$ ֆունկցիայի գրաֆիկը [illegible] Ox և Oy [illegible] [illegible] $x=0$ դնելով $y=C$ $A(0;y)$, [illegible] $y=0$ դնելով $x=C$ $B(x;0)$ և [illegible] $y=kx+b$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Հետևություն ա) $A(x_0; y_0)$ [illegible] $y=kx+b$ [illegible]

բ) $y=kx+b$ ուղիղը [illegible] $A(x_0; y_0)$ [illegible]

գ) Երբ $b=0$ $y=kx$ [illegible]

Ուղիղների փոխդասավորությունը

1) $y = k_1x + b_1$
$y = k_2x + b_2$ ուղիղները [illegible] // երբ $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

2) Երբ $k_1 \neq k_2 \iff$ ուղիղները հատվում են:

3) Երբ $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2 \iff$ ուղիղները համընկնում են

Օրինակ [illegible] $A(1;2)$ [illegible] // $y = 3-2x$ [illegible] $(k=-2)$:

Լուծում [illegible] $y=kx+b$: [illegible] A [illegible] $\Rightarrow \{2 = k \cdot 1 + b$ $\begin{cases} b=4 \\ k=-2 \end{cases}$ [illegible] $y=-2x+4$

[illegible] // $y=3-2x$ [illegible] $\Rightarrow \{k=-2$

Հավասարումը Ուղիղ գծի հավասարումը կարող է գրված լինել ընդհանուր տեսքով

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \;;$$

Այն միշտ կարելի է բերել $y = kx + b$ տեսքի։ Որտեղ

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \Rightarrow k = -\frac{a_1}{b_1}, \quad b = -\frac{c_1}{b_1}$$

Զուգահեռություն (փոխդասավորությունը) Ունենք ուղիղների երկու հավասարում.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$k_1 = -\frac{a_1}{b_1} \qquad k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

1) Եթե $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$; $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2} \iff$ ուղիղները // են։

Կամ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \iff$ ուղիղները // են։

2) Եթե $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \iff$ ուղիղները հատվում են։

3) Եթե $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \iff$ ուղիղները համընկնում են։

Խնդիր. k-ի և m-ի ինչ արժեքների դեպքում $4x - my + 3 = 0$ և $-2x - 3y + k = 0$ ուղիղները կլինեն // (չեն համընկնի)։

Լուծում. I եղանակ $k_1 = \frac{4}{m}, \; k_2 = -\frac{2}{3}, \; b_1 = \frac{3}{m}, \; b_2 = \frac{k}{3}$

$$\frac{4}{m} = -\frac{2}{3}, \; \frac{3}{m} \neq \frac{k}{3} \Rightarrow m = -6, \; k \neq -\frac{3}{2}$$

II եղանակ $\frac{4}{-2} = \frac{-m}{-3} \neq \frac{3}{k} \Rightarrow m = -6, \; k \neq -\frac{3}{2}$

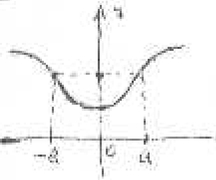
Մասնավոր դեպք ա) $y = b$ ուղիղը // OX առանցքին

բ) $x = a$ ուղիղը // OY առանցքին

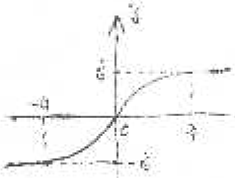
Ֆունկցիաների գրաֆիկների ձևափոխությունը ($y = f(x)$)

1) Եթե $f(-x) = f(x)$ — ֆունկցիան զույգ է։ Գրաֆիկը սիմետրիկ է OY-ի նկատմամբ։

Օրինակ $y = x^2 + 1$: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$ ֆունկցիան զույգ է։



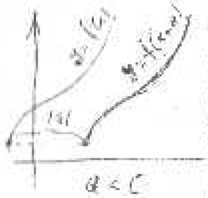
2) Եթե $f(-x) = -f(x)$ — ֆունկցիան կենտ է։ Գրաֆիկը սիմետրիկ է $O(0;0)$ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։



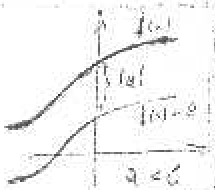
Օրինակ $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + x}$; $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^3 + (-x)} = \frac{x^2}{-x^3 - x} = \frac{x^2}{-(x^3 + x)} = -\frac{x^2}{x^3 + x} = -f(x) \Rightarrow$ ֆունկցիան կենտ է։

3) Եթե $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ — ֆունկցիան աճող է. Գրաֆիկը բարձրանում է վերև։
Եթե $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ — ֆունկցիան նվազող է. Գրաֆիկը իջնում է ներքև

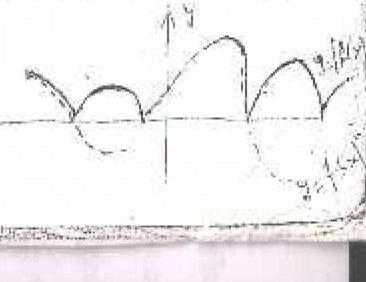
4) Եթե ունենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա $y = f(x + a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y = f(x)$-ի գրաֆիկից, այն a միավոր զուգահեռ տեղափոխելով ա) աջ, եթե $a < 0$ բ) ձախ, եթե $a > 0$



5) Եթե ունենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա $y = f(x) + a$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y = f(x)$-ի գրաֆիկից, այն a միավոր վերև՝ եթե $a > 0$, կամ ներքև՝ եթե $a < 0$ զուգահեռ տեղափոխելով։



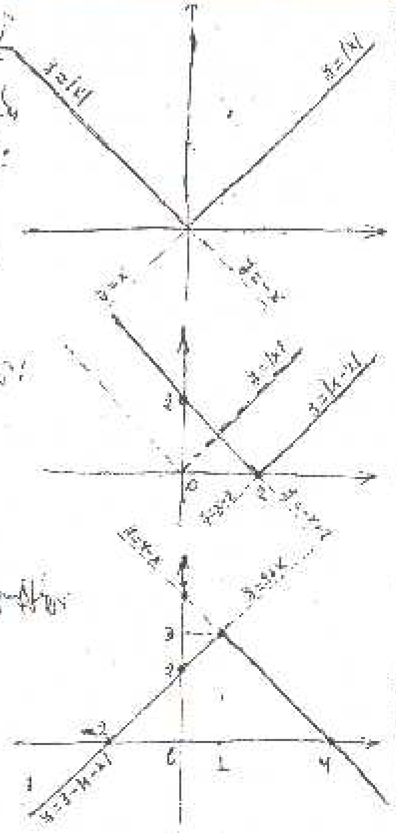
$y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y = f(x)$-ի գրաֆիկից, Ox-ից ներքև ընկած մասը սիմետրիկ արտապատկերելով վերև։



$y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Երբ $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ և $y=|x|$ ֆունկցիան համընկնում է $y=x$ ֆունկցիայի հետ (երբ $x \geq 0$):

Երբ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ և $y=|x|$ ֆունկցիան համընկնում է $y=-x$ ֆունկցիայի հետ (երբ $x<0$):



Օր. Կառուցել $y=|x-2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: $y=|x|$-ի գրաֆիկը 2 միավոր [illegible], քանի որ $a=-2<0$ $(f(x-2))$:

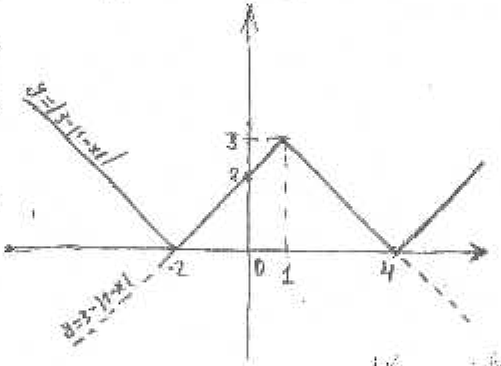
Օր. Կառուցել $y=3-|1-x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

ա) երբ $1-x \geq 0 \Rightarrow y=2+x$ (երբ $x \leq 1$)

բ) երբ $1-x < 0 \Rightarrow y=4-x$ (երբ $x > 1$)

Օրինակ. Կառուցել $y=|3-|1-x||$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Դրա համար նախորդ էջի բ)-րդ կետի $y=3-|1-x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որը ընկած է Ox-ից ներքև, Ox-ի նկատմամբ համաչափորեն պետք է արտապատկերել վերև



Գծային հավասարումներ և դրանց լուծումները

$ax = b$ տեսքի հավասարումը կոչվում է գծ. հավասարում:

1) երբ $a \neq 0$ — ունի մեկ լուծում՝ $x = \frac{b}{a}$

2) երբ $a = 0,\ b \neq 0$ — լուծում չունի:

3) երբ $a = 0,\ b = 0$ — ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Օրինակ. a-ի ինչ արժեքների դեպքում $(2a^2-a)x+1=a^2+x$ հավասարումը լուծում չունի:

Լուծում. Բերենք գծ. հավ. տեսքի. $(2a^2-a-1)x=a^2-1$

լուծում չի ունենա երբ $\begin{cases} 2a^2-a-1=0 \\ a^2-1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1=-\frac{1}{2};\ a_2=1 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ Պատ.՝ $a=-1$

Կրճատ բազմապատկման բանաձևեր

1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

3) $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

4) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

5) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

6) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

7) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

8) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

Բնական ցուցիչով աստիճան

Սահմանում $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ անգամ}}$ $\boxed{a^0 = 1}$

Հատկություններ

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $5^6 : 5^2 = 5^4$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$ $(3^2)^3 = 3^6$

4) $(ab)^n = a^n b^n$ $6^5 = (2\cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$

6) Եթե $a \geq 0 \Rightarrow a^n \geq 0$ $n \in N$ (բնական թվեր)

Եթե $a \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n \geq 0 & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է } (n=2k) \\ a^n \leq 0 & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է } (n=2k+1) \end{cases}$

Օրինակ $(-2)^3 = -8$
$(-2)^4 = 16$

Սահմանում $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $n \in N$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Հետևություն $a^n \cdot a^{-n} = 1$

9

Գծային հավասարումների համակարգեր

$$(1)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$\left(k_1 = -\frac{a_1}{b_1}\right.$ անկյունային գործ.$)$

$\left(k_2 = -\frac{a_2}{b_2}\right.$ անկյունային գործ.$)$

(1) համակարգի լուծում կոչվում է այն $(x;y)$ թվազույգը, որը բավարարում է համակարգի յուրաքանչյուր հավասարմանը:

[illegible]

1) Եթե $k_1 \neq k_2 \Longleftrightarrow$ համակարգը ունի մեկ լուծում, կամ, եթե $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$, կամ եթե $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Longleftrightarrow$ համակ. ունի մեկ լուծ.

2) Եթե $k_1 = k_2$ և $-\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \Longleftrightarrow$ համակարգը լուծում չունի: կամ եթե $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Longleftrightarrow$ համակարգը լուծում չունի

3) Եթե $k_1 = k_2$ և $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \Longleftrightarrow$ համակարգը ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ: կամ, եթե $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Longleftrightarrow$ անվերջ բազմ. լուծումներ

[illegible]

$$\begin{cases} 3x + (a+5)y = -11 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + (a+5)y + 11 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

Լուծում: I եղանակ

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{a+5}x - \frac{11}{a+5}, & k_1 = -\frac{3}{a+5},\ b_1 = -\frac{11}{a+5} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}, & k_2 = -\frac{1}{4},\ b_2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

[illegible], եթե $\begin{cases} -\frac{3}{a+5} = -\frac{1}{4} \\ -\frac{11}{a+5} \neq \frac{7}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a = 7 \\ a \neq -\frac{27}{7} \end{cases}$ Պատ. $a = 7$

II եղանակ [illegible], եթե $\frac{3}{1} = \frac{a+5}{4} \neq -\frac{11}{7}$

Պատ. $a = 7$

Լուծել համակարգը տեղադրման եղանակով

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -24 \\ 2x + y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2(-2x-8) = -24 \\ y = -2x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{40}{7} \\ y = \frac{24}{7} \end{cases}$$

Պատ. $\left(-\frac{40}{7}; \frac{24}{7}\right)$

Համակարգերի լուծման գումարման եղանակ

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -24 \\ 2x + y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x = -40 \\ 2x + y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{40}{7} \\ y = \frac{24}{7} \end{cases}$$

Պատ. $\left(-\frac{40}{7}; \frac{24}{7}\right)$

Հիշողություն: Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը $(x;y)$ թվազույգը համակարգի հավասարումներով որոշվող ուղիղների հատման կետն է $(x;y)$ թվազույգին համապատասխանող $A(x; y)$ կետը xOy հարթության վրա:

Գծային հավասարումների համակարգեր

$$(1)\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \qquad \left(k_1=-\frac{a_1}{b_1}\ \text{անկյունային գործ.}\right) \quad \left(k_2=-\frac{a_2}{b_2}\ \text{անկյունային գործ.}\right)$$

Սահմանում: (1) համակարգի լուծում կոչվում է այն $(x;y)$ թվազույգը, որը բավարարում է համակարգի յուրաքանչյուր հավասարմանը:

Գծային համակարգերի լուծելիությունը

1) Երբ $k_1 \neq k_2 \iff$ համակարգը ունի մեկ լուծում:
Կամ, երբ $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$, կամ երբ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \iff$ համակ. ունի մեկ լուծում:

2) Երբ $k_1 = k_2$ և $-\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \iff$ համակարգը լուծում չունի:
Կամ, երբ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \iff$ համակարգը լուծում չունի

3) Երբ $k_1 = k_2$ և $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \iff$ համակարգը ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:
Կամ, երբ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \iff$ անթիվ բազմ. լուծումներ:

Օրինակ. a-ի ինչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում չունի.

[4ռ.-2]

$$\begin{cases} 3x+(a+5)y=-11 \\ x+4y-7=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+(a+5)y+11=0 \\ x+4y-7=0 \end{cases}$$

Լուծում. I եղանակ

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{a+5}\cdot x-\frac{11}{a+5}, & k_1=-\frac{3}{a+5},\ b_1=-\frac{11}{a+5} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}, & k_2=-\frac{1}{4},\ b_2=\frac{7}{4} \end{cases}$$

Լուծում չի ունենա, երբ $\begin{cases} -\frac{3}{a+5}=-\frac{1}{4} \\ -\frac{11}{a+5} \neq \frac{7}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a=7 \\ a \neq -\frac{79}{7} \end{cases}$ Պատ. $a=7$.

II եղանակ

Լուծում չունի, երբ $\frac{3}{1}=\frac{a+5}{4} \neq -\frac{11}{7}$

Պատ. $a=7$.

10. Համակարգերի լուծումը տեղադրման եղանակով.

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-4 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=-2 \end{cases} \begin{cases} 2x-3y=-24 \\ 2x+y=-8 \end{cases} \begin{cases} 2x-3(-2x-8)=-24 \\ y=-2x-8 \end{cases} \begin{cases} x=-6 \\ y=-20 \end{cases}$$

Պատ. $(-6;-20)$

Համակարգերի լուծման գումարման եղանակ

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-4 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=-2 \end{cases} \begin{cases} 2x-3y=-24 \\ 2x+y=-8 \end{cases}\begin{matrix} 1 \\ + \\ 3 \end{matrix} \begin{cases} 8x=-48 \\ 6x+3y=-24 \end{cases} \begin{cases} x=-6 \\ y=-20 \end{cases}$$

Պատ. $(-6;-20)$

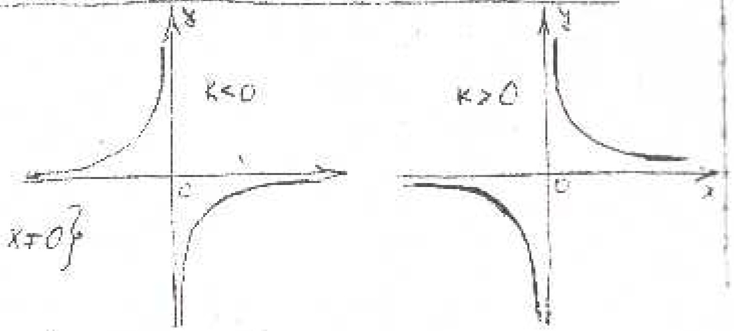
Մեկնաբանում. Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը ($(x;y)$ թվազույգը) համակարգի հավասարումներով որոշվող ուղիղների հատման կետն է ($(x;y)$ թվազույգին համապատասխանող $A(x;y)$ կետը xOy հարթության վրա):

11. <u>Հակադարձ համեմատականության ֆունկցիա</u>

$y = \frac{k}{x}$

Գրաֆիկը — հիպերբոլ

$D(y): \{x \,/\, x \in R,\ x \neq 0\}$



Օրինակ 250 բ) k-ի և b-ի ինչ արժեքների դեպքում $y = \frac{k}{x}$ հիպերբոլը և $y = kx + b$ ուղիղը անցնում են $Q(-2;3)$ կետով։

Լուծում

$$\begin{cases} 3 = \frac{k}{-2} \\ 3 = k\cdot(-2) + b \end{cases} \quad \begin{cases} k = -6 \\ 3 = 12 + b \end{cases} \quad \begin{cases} k = -6 \\ b = -9 \end{cases}$$

Պատ. -6; -9

---

12. <u>Իրական թվեր</u>

Սահմանում $\frac{m}{n}$ անկրճատելի կոտորակի տեսքով ներկայացվող թվերը կոչվում են ռացիոնալ թվեր։ (Q)

Նկատողություն Պարզ է, որ բոլոր ամբողջ թվերը ռացիոնալ թվեր են։ Օրինակ՝ $-6 = -\frac{6}{1}$, $13 = \frac{13}{1}$

Նկատողություն Ցանկացած ռացիոնալ թիվ ներկայացվում է անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով։

Օրինակ $7 = 7{,}000\ldots$, $\frac{2}{3} = 0{,}66\ldots = 0{,}(6)$, $\frac{1}{4} = 0{,}25\ldots$

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285\ldots = 0{,}(714285)$

Սահմանում Այն թվերը, որոնք ներկայացվում են անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակների տեսքով կոչվում են իռացիոնալ թվեր։

Օրինակ Ապացուցել, որ $\sqrt{2}$-ը իռացիոնալ թիվ է։

Լուծում Այն հակառակից ենթադրենք, որ այն կարելի է ներկայացնել $\frac{m}{n}$ անկրճատելի կոտորակի տեսքով

Եթե հակառակը՝ $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (որտեղ $\frac{m}{n}$-ը անկրճատելի)

Այդ դեպքում $\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$-ն զույգ

$\Rightarrow m$-ը զույգ է, այսինքն՝ $m = 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n$-ը զույգ է՝ $n = 2l$

Ստացվեց $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$ կրճատելի $\Rightarrow \sqrt{2}$-ը իռացիոնալ է

Իռացիոնալ են նաև $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$-ը

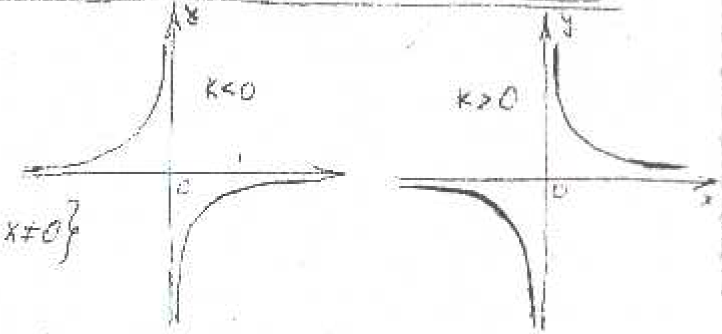
Սահմանում Բոլոր ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բազմությունը կոչվում է իրական թվերի բազմություն

11. Հակադարձ համեմատականության ֆունկցիա

$y = \frac{k}{x}$

գրաֆիկը — հիպերբոլ

$D(y): \{x / x \in R, x \neq 0\}$



Օրինակ 2850 բ) k-ն և b-ն ինչ արժեքների դեպքում $y = \frac{k}{x}$ հիպերբոլը և $y = kx + b$ ուղիղը անցնում են $Q(-2;3)$ կետով:

Լուծում

$$\begin{cases} 3 = \frac{k}{-2} \\ 3 = k\cdot(-2) + b \end{cases} \quad \begin{cases} k = -6 \\ 3 = 12 + b \end{cases} \quad \begin{cases} k = -6 \\ b = -9 \end{cases}$$

Պատ. -6; -9

---

12. Իրական թվեր

Սահմանում $\frac{m}{n}$ անկրճատելի կոտորակի տեսքով ներկայացվող թվերը կոչվում են ռացիոնալ թվեր: (Q)

Դիտողություն Պարզ է, որ բոլոր ամբողջ թվերը ռացիոնալ թվեր են: Օրինակ $-6 = -\frac{6}{1}$, $13 = \frac{13}{1}$

Դիտողություն Ցանկացած ռացիոնալ թիվ ներկայացվում է անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

Օրինակ

$x = 3,000\ldots$, $\frac{2}{3} = 0,66\ldots = 0,(6)$, $\frac{1}{4} = 0,2500\ldots$

$\frac{5}{7} = 0,714285714285\ldots = 0,(714285)$

Սահմանում Այն թվերը, որոնք ներկայացվում են անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակների տեսքով կոչվում են իռացիոնալ թվեր:

Օրինակ Ապացուցենք որ $\sqrt{2}$-ը իռացիոնալ թիվ է:

Լուծում Եթե հակառակը ենթադրենք և ձ/ր որ այն չի ներկայացվում $\frac{m}{n}$ անկրճատելի կոտորակի տեսքով:

Այդ հակառակը՝ $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (որտեղ $\frac{m}{n}$-ը անկրճատելի է)

Այդ դեպքում $\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$-ն զույգ է

$\Rightarrow m$-ը զույգ է, այսինքն՝ $m = 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n$-ը զույգ է՝ $n = 2p$:

Ստացանք $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2p}$ կրճատելի է $\Rightarrow \sqrt{2}$-ը իռացիոնալ է:

Իռացիոնալ են նաև $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ -ը:

Սահմանում Բոլոր ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բազմությունը կոչվում է իրական թվերի բազմություն:

Թվաբանական քառակուսի արմատ

<u>Սահմանում</u> a թվից ոչ բաց. քառ. արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական թիվը, որի քառակուսին $= a$ և նշ. է $\sqrt{a}$։

<u>Հետևություն</u> Անմիջապես հետևում է, որ $a \geq 0$ և $(\sqrt{a})^2 = a$

երբ $a < 0$ $\sqrt{a}$-ն իմաստ չունի։

<u>$x^2 = a$ հավասարման լուծումը</u>

$$x = \pm\sqrt{a} \qquad a \geq 0$$

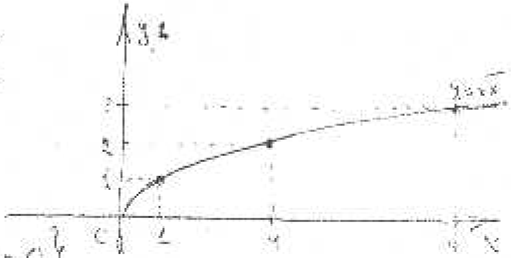
<u>Հատկություն</u>

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

<u>օրինակ</u> $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

<u>$y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը</u>

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4



Որոշման տիրույթը $D(y): \{x / x \geq 0\}$

Արժեքների տիրույթը $E(y): \{y / y \geq 0\}$

Կառուցել $y = 2 - \sqrt{x+1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

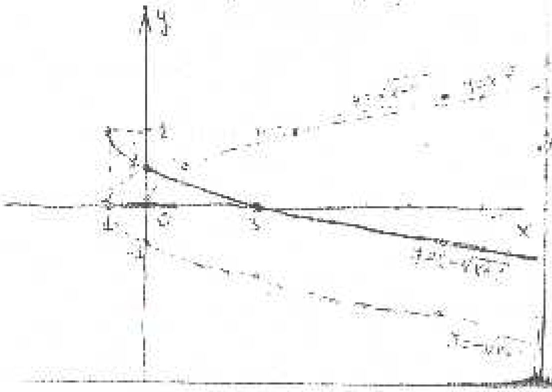
<u>Լուծում</u>

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x+1) = \sqrt{x+1}$

$-f(x+1) = -\sqrt{x+1}$

$y(x) = f(x+1) + 2 = 2 - \sqrt{x+1}$



Քառ. արմատի հատկությունները

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

3) $\sqrt{a^{2k}} = a^k, \quad a \geq 0$

<u>Հետևանք</u> ա) $a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2 b}, & a \leq 0 \\ \sqrt{a^2 b}, & a \geq 0 \end{cases}$

բ) $\sqrt{a^{2k+1}} = \sqrt{a^{2k} \cdot a} = a^k \sqrt{a}, \quad a \geq 0$

<u>Օրինակ</u> $a\sqrt{b^2 a^4} = -\sqrt{b^2 a^{6}}$, երբ $a \leq 0$; $\sqrt{b^2 a^{6}}$, երբ $a \geq 0$

<u>Օրինակ</u> Արտահայտել ... $\sqrt{a^6 b^3 c^7}$, եթե $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$։

<u>Լուծում</u> $\sqrt{a^6 b^3 c^7} = -a^3 b c^3 \sqrt{bc}$

<u>Օրինակ</u> Ազատվել հայտարարի իռացիոնալությունից։

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = -1-\sqrt{2}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+2)^2 - (\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{2+4\sqrt{2}+4-3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}+3} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(4\sqrt{2}-3)}{(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)} =$

$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(4\sqrt{2}-3)}{32-9}$

<u>Օրինակ</u> Լուծել $\sqrt{(x-3)^2} = 1$ հավասարումը։

<u>Լուծում</u> $|x-3| = 1$

1) $\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ -x+3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3 \\ x = 2 \end{cases}$ $x = 2$ լուծում

2) $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x = 4 \end{cases}$ $x = 4$ լուծում։

Պատ. 2; 4.

Բացասական ցուցիչով (ամբողջ) աստիճան

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Օրինակ $\frac{6^n}{2^{n-1}\cdot 3^{n+1}} = \frac{2^n \cdot 3^n}{2^{n-1}\cdot 3^{n+1}} = 2^{n-(n-1)} \cdot 3^{n-(n+1)} = 2\cdot 3^{-1} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Օրինակ $0{,}1\cdot x^{-3} y \cdot (0{,}1 x y^{-2})^{-1} = \frac{0{,}1 y}{x^3}\cdot\left(\frac{0{,}1x}{y}\right)^{-1} = \frac{0{,}1 y\cdot y}{x^3\cdot 0{,}1x} = \frac{0{,}1y^2}{0{,}1x^4} = 0{,}1y^2x^{-4}$

Օրինակ $\frac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2} + 5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}} = \frac{2^{n-2}\cdot 5^{n-2}(5^3+2)}{10^{n-2}} = \frac{10^{n-2}\cdot 127}{10^{n-2}} = 127$

---

n-աստիճանի արմատ $\quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Սահմանում a թվից n աստիճանի արմատ կոչվում է այն թիվը, որի n աստիճանը հավասար է a: Նշ. է $\sqrt[n]{a}$:

Դիտողություն
ա) եթե $a \geq 0$, ապա $\sqrt[n]{a}$-ն իմաստ ունի:
բ) եթե $a < 0$, n զույգ է, ապա $\sqrt[n]{a}$-ն իմաստ չունի
գ) եթե [illegible] n կենտ է, ապա $\sqrt[2m+1]{a}$-ն իմաստ ունի:

Օրինակ $\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \sqrt[4]{16} = 2$
$\sqrt[4]{-16}$ իմաստ չունի:

Հետագայում զույգ աստիճանի արմատի դեպքում բացասական չենք դիտարկի:

Հատկություններ — նույնն են ինչ որ ռացիոնալ աստիճանի համար:

Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան

Սահմանում $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $\qquad a^{\frac{mk}{n}} = (a^{\frac{m}{n}})^k$

$3^{\frac{12}{5}} = (3^{\frac{4}{5}})^3$

Հատկություններ Եթե p-ն և q-ն ռացիոնալ թվեր են, ապա

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ Օրինակ $2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{10+3}{15}} = 2^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{2^{13}}$

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$ Օրինակ $2^{-\frac{3}{4}} : 2^{\frac{2}{5}} = 2^{-\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} = 2^{-\frac{23}{20}} = \sqrt[20]{2^{-23}}$

3) $(a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

7) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
Օրինակ $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{-3}} = \sqrt[15]{-3}$

5) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ Օրինակ $\sqrt[12]{a^{15}b^9c^{12}} = \sqrt[4]{a^5b^3c^4}$

6) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{k}{q}} = a^{\frac{mk}{nq}}$ Օրինակ $(3^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$

Օրինակ 2.613

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a+1})^2} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a-1})^2}\right) : \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} =$$

$$= \left(-(\sqrt{a}-\sqrt{a+1}) + \sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})\cdot\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}} = \sqrt{a-1}$$

Դիտողություն $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{m}{kn}})^k$ Օրինակ $2^{\frac{1}{3}} = (2^{\frac{1}{6}})^2, \quad 2^{\frac{1}{4}} = (2^{\frac{1}{16}})^4$

$a^{b} = (a^{\frac{b}{2}})^2$ կամ $a^{2b} = (a^{b})^2$ Օրինակ $3^{\frac{1}{5}} = (3^{\frac{1}{20}})^4$

1.100 $\left(\frac{(a+b)^{-2/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-x}\, b^{1-3/4}}\right)^{2/3} : \left(\frac{b^{3} c^{4}}{(a+b)^{2x}\, a^{16-8x}}\right)^{1/6} =$

$= \frac{(a+b)^{-1/3}\cdot c^{1/3}}{a^{\frac{2-x}{3}}\, b^{-1}} \cdot \frac{(a+b)^{1/3}\cdot a^{\frac{8-4x}{3}}}{b^{1/2}\, c^{2/3}} = \frac{b}{b^{1/2}} = b^{1/2} = \sqrt{b}$

1.014 $\frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}} \cdot \frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/4}-y^{1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}} =$

$= \frac{(x^{1/2}-y^{1/2})(x^{1/2}+y^{1/2})\cdot x^{1/4}y^{1/4}(x^{1/4}+y^{1/4})(x^{1/4}-y^{1/4})}{x^{1/2}(x^{1/4}+y^{1/4})\cdot(x^{1/2}+y^{1/2})\cdot(x^{1/4}-y^{1/4})^{2}} =$ [illegible]

$= \frac{y^{1/4}(x^{1/4}+y^{1/4})}{x^{1/4}}$

0.98 $\frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1} =$

$= \frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{(1-\sqrt[4]{2t})(1+\sqrt[4]{2t}+\sqrt{2t})}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}} \cdot \left(\frac{\frac{(1+\sqrt[4]{2t})^{3}}{\sqrt[4]{2t}}}{\frac{\sqrt[4]{2t}+1}{\sqrt[4]{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1} =$

$= \frac{1-\sqrt{2t}}{1+\sqrt[4]{2t}} \cdot \left(\frac{(1+\sqrt[4]{2t})(1-\sqrt[4]{2t}+\sqrt{2t})}{\sqrt[4]{2t}+1}-\sqrt{2t}\right)^{-1} =$

$= \frac{(1-\sqrt[4]{2t})(1+\sqrt[4]{2t})}{1+\sqrt[4]{2t}} \cdot (1-\sqrt[4]{2t})^{-1} = 1$

1.125 Ապացուցել. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} = 2$

$(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{(4+\sqrt{15})^2(\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}))^2(4-\sqrt{15})} =$

$= \sqrt{(4+\sqrt{15})\,2\,(5-2\sqrt{15}+3)(16-15)} =$

$= \sqrt{(4+\sqrt{15})\,2\,(8-2\sqrt{15})} = \sqrt{4(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})} = \sqrt{4\cdot 1} = 2$

1.132 Ապացուցել.

$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ / $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3} + \frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$

$\sqrt{7}+\sqrt{6} = \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}$

$\sqrt{7}+\sqrt{6} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$

0.[illegible] Ապացուցել որ $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ -ը բնական թիվ է:

Լուծում I եղանակ Դիցուք $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a$, $a>0$

$a^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 =$

$= 7+4\sqrt{3}+2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}+7-4\sqrt{3} = 14+2\sqrt{49-48} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 4$; $\left.\begin{matrix} a^2=16 \\ a>0 \end{matrix}\right] \Rightarrow a=4$ Պատ. 4:

II եղանակ $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}+\sqrt{2^2-2\cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}|+|2-\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$

0.153 $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a} = 5$. Գտնել $\sqrt{(8-a)(5+a)}$ -ն:

$8-a+2\sqrt{(8-a)(5+a)}+5+a = 25$

$\sqrt{(8-a)(5+a)} = 6$ Պատ. 6.

1-17 46 [illegible]

Ապացուցել.

$2(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-1}+5(\sqrt{8}+\sqrt{3})^{-1}-3(\sqrt{8}-\sqrt{5})^{-1} = 0$

$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}+\frac{5(\sqrt{8}-\sqrt{3})}{8-3}-\frac{3(\sqrt{8}+\sqrt{5})}{8-5}$

$= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{3}-\sqrt{8}-\sqrt{5} = 0$

Քառակուսի հավասարումներ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

1) Արմատները՝ $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Մասնավոր դեպք. Եթե b-ն զույգ է $(b = 2k)$ արմատները կլինեն՝

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

2) $D = b^2 - 4ac$ արտահայտությունը կոչվում է դիսկրիմինանտ

3) $ax^2 + bx + c = 0$ քառ. հավասարման լուծելիությունը

ա) եթե $D = b^2 - 4ac > 0$ — հավ-ը ունի երկու տարբեր արմատներ

բ) եթե $D = 0$ — հավ-ը ունի մեկ արմատ (երկու համընկնող)

գ) եթե $D < 0$ — հավ-ը լուծում չունի

4) Ոչ լրիվ քառ. հավասարումներ

ա) $ax^2 + c = 0$ եթե $-\frac{c}{a} \geq 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

բ) $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$ միշտ ունի լուծում.
$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

Նկատողություն. որպես բ) դեպքի քառ. հավասարումներն [illegible] միշտ ունեն երկու լուծում, որոնցից մեկը 0։

5) Վիետի թեորեմը. Եթե x_1, x_2-ը $ax^2 + bx + c = 0$ քառ. հավասարման արմատներն են, ապա

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Հակադարձ թեորեմ. Եթե $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2$-ը հանդիսանում են $x^2 + px + q = 0$ քառ. հավասարման արմատներ

6) Քառ. հավասարման արմատների նշանները

ա) Եթե $D > 0$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ $\Rightarrow$ քառ. հավասարումն ունի երկու դրական տարբեր արմատներ $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$

բ) Եթե $D > 0$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ $\Rightarrow$ քառ. հավասարումն ունի երկու տարբեր բացասական արմատներ $(x_1 < 0,\ x_2 < 0)$

գ) Եթե $D > 0$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ $\Rightarrow$ քառ. հավասարումն ունի երկու [illegible] նշանի արմատներ։

Բիքառակուսային հավասարումներ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

[illegible] $x^2 = t$ [illegible]
$at^2 + bt + c = 0$ քառ. հավասարումը $(t \geq 0)$
Այդ հավասարման դրական լուծումները տեղադրելով $x^2 = t$ հավասարման մեջ և լուծելով կստանանք բիքառակուսային հավասարման լուծումները։

Զա-16

$x^2+\sqrt{a+1}\cdot x+24=0$

$x_1=3x_2$

a — ?

$a+1\ge 0 \Rightarrow a\ge -1$

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=24 \\ x_1=3x_2 \\ x_1+x_2=-\sqrt{a+1} \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_2^2=24,\ x_2=\pm 2\sqrt{2} \\ x_1=\pm 6\sqrt{2} \\ x_1+x_2=-\sqrt{a+1} \end{cases}$

ա) $x_1=2\sqrt{2},\ x_2=6\sqrt{2} \Rightarrow x_1+x_2=8\sqrt{2}$

$x_1+x_2=-\sqrt{a+1}=8\sqrt{2}$ ✗

բ) $x_1=-2\sqrt{2},\ x_2=-6\sqrt{2} \Rightarrow x_1+x_2=-8\sqrt{2}$

$-\sqrt{a+1}=-8\sqrt{2}$ [illegible] $\sqrt{a+1}=8\sqrt{2}$

$a+1=128 \Rightarrow a=127$ Պատ. **127**

Լուծել $x^2-3x+2=0$ [illegible]

Լուծում

$x^2-3x+2=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)=$

$=(x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=1$

Զա-30

$x^2+(a+1)x+a+3=0$

$2x_1(6x_2+1)=2-x_2$

a — ?

$\begin{cases} x_1+x_2=1-a \\ x_1\cdot x_2=a+3 \\ 3x_1x_2+x_1=2-x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=1-a \\ x_1\cdot x_2=a+3 \\ 3(a+3)+(1-a)=2 \end{cases}$

$2a=-8 \quad a=-4$ Պատ. **−4**

Զp-10

$(2p-1)x^2-(3p-2)x-8p=0$

$x_1=3$

p — ?, x_2 — ?

Քանի որ $x_1=3$-ը [illegible]

$9(2p-1)-3(3p-2)-8p=0$

$p=3$

$x_1\cdot x_2=-\frac{8p}{2p-1}$ [illegible] $3x_2=-\frac{24}{2\cdot 3-1}$

$x_2=-\frac{8}{5}$ Պատ. $p=3,\ x_2=-8/5$

Զp-14

$x^2-4x-2=0$

[illegible]

$x_1^{-2}+x_2^{-2}$ — ?

$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}$

Ըստ Վիետի [illegible] $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=-2$ ⇒

$\Rightarrow x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{16-2\cdot(-2)}{(-2)^2}=3$ Պատ. **3**

Զա-56

$ax^2+bx+c=0$

[illegible]

$x_1=-2,\ x_2=1$

$z=(c+a)(a+b)^{-1}$ — ?

$z=\frac{c+a}{a+b}=\frac{\frac{c+a}{a}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{\frac{c}{a}+1}{1+\frac{b}{a}}$

$-\frac{b}{a}=x_1+x_2=-1 \Rightarrow \frac{b}{a}=1$

$\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2=-2 \Rightarrow \frac{c}{a}=-2$ ⇒

$\Rightarrow z=\frac{-2+1}{1+1}=-\frac{1}{2}$ Պատ. **−1/2**

Զp-66

$ax^2+bx+c=0$

$x_1=4,\ x_2=c,\ a\ne 0{,}25$

$b\cdot a^{-1}+16c$ — ?

$b\cdot a^{-1}+16c=\frac{b}{a}+16c$

$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+4=-\frac{b}{a} \\ 4c=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c+4=-\frac{b}{a} \\ c\left(\frac{1}{a}-4\right)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{b}{a}=-4 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$ [illegible]

Պատ. [illegible]

Զp-67

[illegible] $x^2-3x+2=0$ [illegible]

$x_1^3+x_2^3$ — ?

$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=2 \end{cases}$ [illegible]

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$

$=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2\right)=$

$=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=3(9-6)=9$

Պատ. **9**

23

Քառակուսի եռանդամ

$y = ax^2+bx+c$

1) $D = b^2-4ac$ — կոչվում է դիսկրիմինանտ:

2) Լրիվ քառակուսու անջատումը:

$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$
$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

3) Քառ. եռանդամի արտադրիչների վերլուծումը:

Երբ $D = b^2-4ac \geq 0 \Rightarrow$ կարող ենք գրել՝

$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2 \Rightarrow$

$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right] =$

$= a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] =$

$= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) =$

$= a(x-x_1)(x-x_2)$, որտեղ x_1, x_2-ը եռանդամի արմատներն են:

Հետևաբար, երբ $D>0$, ապա

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Գործնականում հիշենք, որ

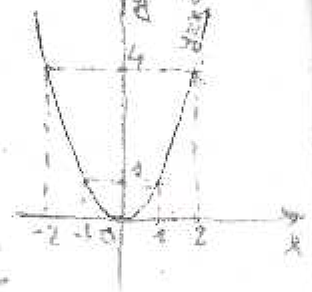
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \quad (*)$$

24

Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը

$y = ax^2+bx+c$ Գրաֆիկը պարաբոլ է:

Մասնավոր դեպքեր

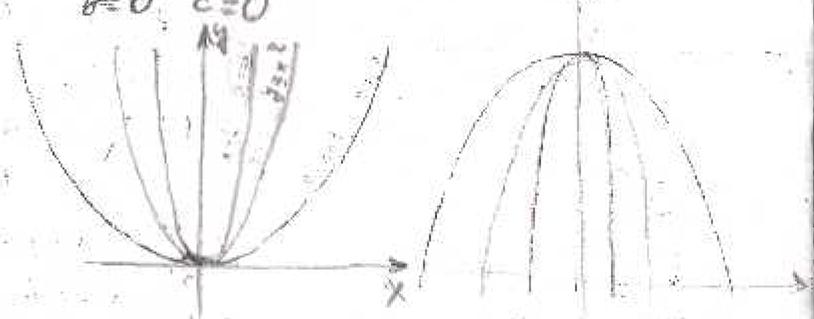


1) $y = x^2$, $a=1$, $b=0$, $c=0$

Գրաֆիկը սիմետրիկ է Oy-ի նկատմամբ, գագաթը $(0,0)$ կետում, ճյուղերը վերև, $x\in(-\infty,1)$ — նվազող, $x\in(0;\infty)$ — աճող

Դիտողություն՝ $y=-x^2$ ֆունկցիայի (երբ $a=-1$, $b=0$, $c=0$) գրաֆիկը ստացվում է $y=x^2$ ֆ-ի գրաֆիկից այն սիմետրիկ արտապատկերելով Ox-ի նկատմամբ՝ ճյուղերը կլինեն ներքև:

2) $y = ax^2$ $b=0$, $c=0$



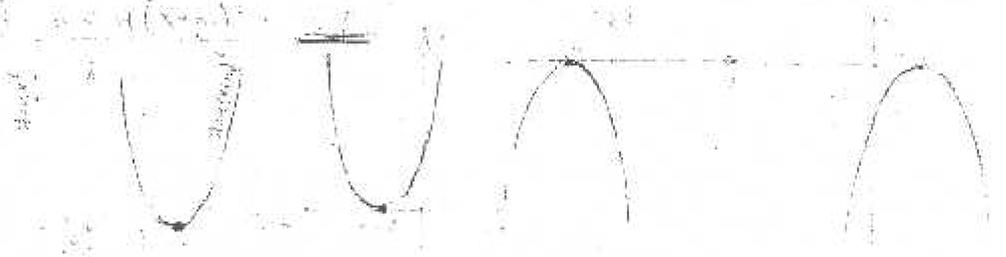
$|a|<1$ -

$|a|>1$ -

ա) $a>0$ — պարաբոլի ճյուղերը վերև են,

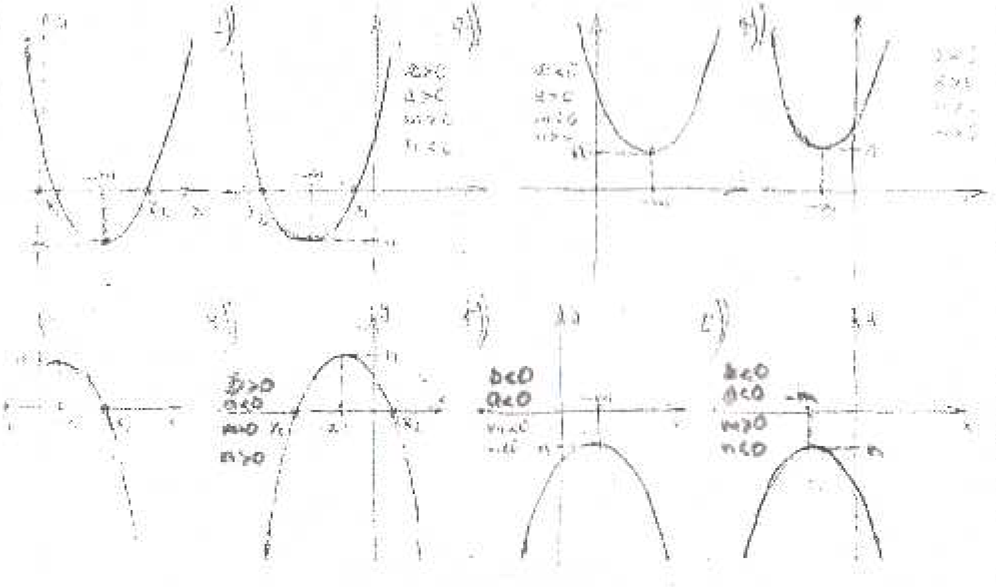
բ) $a<0$ — պարաբոլի ճյուղերը ներքև են:

3) $y = a(x+m)^2$



$a>0,\ m<0$ $\quad a>0,\ m>0$ $\quad a<0,\ m>0$ $\quad a<0,\ m<0$

$y = a(x+m)^2 + n$

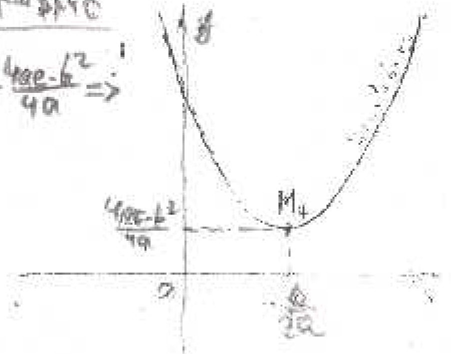


$y = ax^2 + bx + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

(*) $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{b}{2a}$, $n = \frac{4ac-b^2}{4a}$

$M_4\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$



Օրինակ Գտնել $y = 1+2x-x^2$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $(a=-1, b=2, c=1)$

[illegible]

$= \frac{4ac-b^2}{4a} = \ldots = 2$ Պատ. $\boxed{2}$

Օրինակ a-ի ինչ արժեքների դեպքում $x^2+ax+a-2=0$ հավասարման արմատների քառակուսիների գումարը կլինի ամենափոքրը

Լուծում

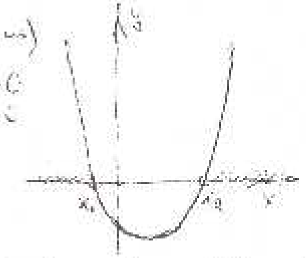
$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1 x_2 = a-2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2-2(a-2)$

[illegible] Պատ. [illegible]

[illegible]

1) $y = ax^2 + bx + c > 0$

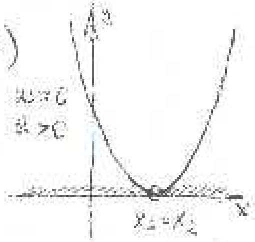
a) $a > 0$, $D > 0$



[illegible] $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

$x < x_1$ [illegible] $x > x_2$

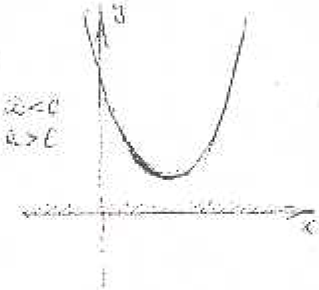
b) $a > 0$, $D = 0$



$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

$x < x_1$ [illegible] $x > x_1$

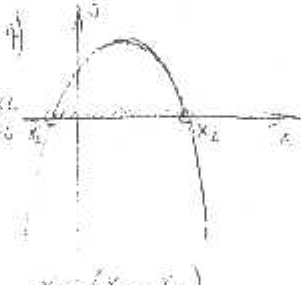
g) $a > 0$, $D < 0$



$x \in (-\infty; \infty)$

$-\infty < x < \infty$

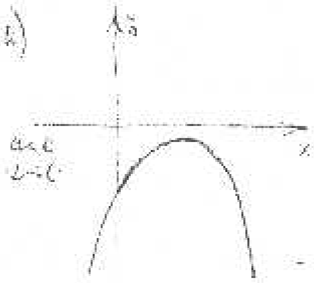
d) $a < 0$, $D > 0$



$x \in (x_1; x_2)$

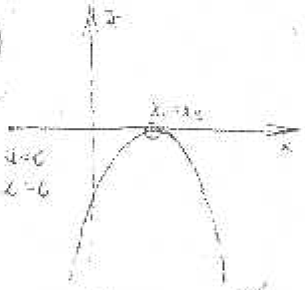
$x_1 < x < x_2$ (as written)

e) $a < 0$, $D < 0$



[illegible] $\emptyset$

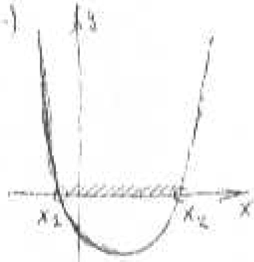
v) $a < 0$, $D = 0$



[illegible] $\emptyset$

2) $y = ax^2 + bx + c < 0$

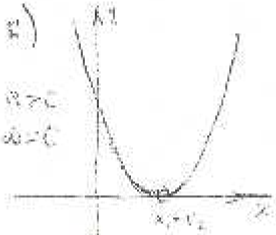
a) $a > 0$, $D > 0$



$x \in (x_1; x_2)$

$x_1 < x < x_2$

b) $a > 0$, $D = 0$

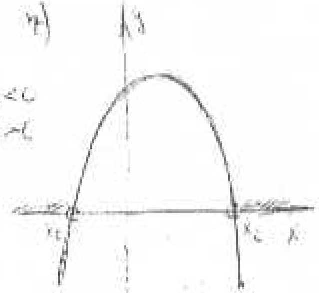


[illegible] $\emptyset$

g) $a > 0$, $D < 0$

[illegible] $\emptyset$

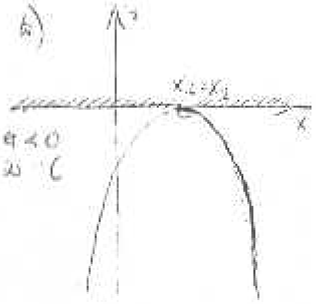
d) $a < 0$, $D > 0$



$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

$x < x_1$ [illegible] $x > x_2$

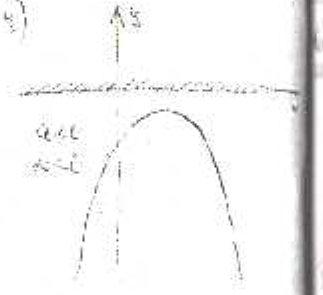
e) $a < 0$, $D = 0$



$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

$x < x_1$ [illegible] $x > x_1$

v) $a < 0$, $D < 0$



$x \in (-\infty; \infty)$ (as written)

[illegible]

[illegible] $ax^2 + bx + c \geq 0$ [illegible]

a) [illegible] $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2, \infty)$

b) [illegible] $x \in (-\infty; \infty)$

g) [illegible] $x \in (-\infty; \infty)$

d) [illegible] $x \in [x_1, x_2]$

e) [illegible] $\emptyset$

v) [illegible] $x = x_1$

[illegible] $ax^2 + bx + c \leq 0$ [illegible]

a) [illegible] $x \in [x_1; x_2]$

b) [illegible] $x = x_1$

g) [illegible] $\emptyset$

d) [illegible] $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$

e) [illegible] $x \in (-\infty; \infty)$

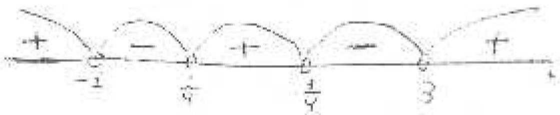
v) [illegible] $x \in (-\infty; \infty)$

[illegible]

[illegible] 6

$$\frac{(x+1)(4x-1)^2}{(x-3)(4x-3)^2} < 0$$

[illegible] $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = 3,\ x_4 = \frac{3}{4}$



[illegible]

$x \neq 3,\quad x \neq \frac{3}{4}$

$x \in (-\infty; \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}; 3) \cup (3; \infty)$

[illegible] $x \in (-1; \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}; 3)$

[illegible] ≤ 0 [illegible] $\frac{1}{4}$ [illegible] -1 [illegible]

[illegible] 4

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2(x-4)} \leq 0$$

[illegible] $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 4$

[illegible]

$x \neq -3,\quad x \neq 4$

$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 4) \cup (4; \infty)$

[illegible] $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [3; 4)$

[illegible] 13

$$\frac{x^2+5x-3}{x^2+5x+6} < 1$$

$$\frac{x^2+5x-3}{x^2+5x+6} - 1 < 0$$

$$\frac{-10x-9}{x^2+5x+6} < 0$$

[illegible] $-10x - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{9}{10}$

$x^2+5x+6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -2$

[illegible] $x \neq -3,\ x \neq -2$

[illegible] $x \in (-3, -2) \cup (-\frac{9}{10}; \infty)$

[illegible] 15

$$\frac{(x-3)^2(x-4)}{\sqrt{2x^2-x-6}} \geq 0$$

[illegible] $(x-3)^2 \geq 0$ [illegible]

[illegible] $\sqrt{2x^2-x-6} > 0$ [illegible] $\Rightarrow x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

[illegible]

$2x^2 - x - 6 > 0$

$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 2$

$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (2; \infty)$

[illegible]

$x \in [4; \infty) \cup \{3\}$

[illegible]

[illegible] 6

$$\frac{2x-3}{1+x} \leq 0$$

[illegible] I [illegible]

1) $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3/2 \\ x < -1 \end{cases}$

[illegible] $x = \varnothing$

2) $\begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3/2 \\ x > -1 \end{cases}$

[illegible] $x \in (-1; 3/2]$

[illegible] II [illegible] $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

[illegible]

$x_1 = -1,\quad x_2 = 3/2$

[illegible] ~~$x \in$ [illegible]~~

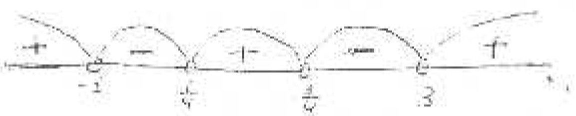
$x \in (-1;\ 3/2]$

[illegible]

Օրինակ 6

$$\frac{(x+1)(4x-1)^2}{(x-3)(4x-3)^2} < 0$$

[illegible] $x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=3,\ x_4=\frac{3}{4}$



Պատ.՝ $x \in (-1; \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}; 3)$

Ո.Ա.Տ. $x \neq 3,\ x \neq \frac{3}{4}$

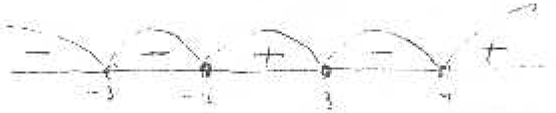
$x \in (-\infty; \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}; 3) \cup (3; \infty)$

Դիտողություն. [illegible] $\frac{1}{4}$-ը և -1-ը [illegible]

Օրինակ 4

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2(x-4)} \leq 0$$

0-ները՝ $x_1=3;\ x_2=-1,\ x_3=-3,\ x_4=4$



Ո.Ա.Տ. $x \neq -3,\ x \neq 4$

$x \in (-\infty, -3) \cup (-3; 4) \cup (4; \infty)$

Պատ.՝ $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [3; 4)$

Օրինակ 13

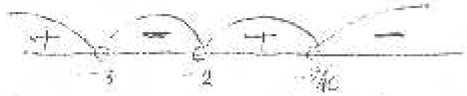
$$\frac{x^2+5x-3}{x^2+5x-6} < 1$$

$$\frac{x^2+5x-3}{x^2+5x-6} - 1 < 0$$

$$\frac{-10x-3}{x^2+5x-6} < 0$$

Զրոները՝ $-10x-3=0 \Rightarrow x_1=-\frac{3}{10}$

$x^2+5x+6=0 \Rightarrow x_2=-3,\ x_3=-2$



Ո.Ա.Տ. $x \neq -3,\ x \neq -2$

Պատ. $x \in (-3; -2) \cup (-\frac{3}{10}; \infty)$

Օրինակ 59

$$\frac{(x-3)^2(x-4)}{\sqrt{2x^2-x-6}} \geq 0$$

[illegible] Ո.Ա.Տ.-ում $(x-3)^2 \geq 0$ [illegible], $\sqrt{2x^2-x-6} > 0$ [illegible] $\Rightarrow x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

Ո.Ա.Տ. $2x^2-x-6>0$

$x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=2$

$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (2; \infty)$

Պատ.՝

$x \in [4; \infty) \cup \{3\}$

[illegible] անհավասարումներ

Օրինակ

$$\frac{2x-3}{1+x} \leq 0$$

Լուծման I եղանակ

1) $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3/2 \\ x < -1 \end{cases}$

$x = \varnothing$

2) $\begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3/2 \\ x > -1 \end{cases}$

Պատ.՝ $x \in (-1; 3/2]$

Լուծման II եղանակ [illegible] Ո.Ա.Տ. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

[illegible] 0-ների

$x_1=-1;\ x_2=3/2$

Պատ. ~~$x \in (-\infty; -1) \cup$ [illegible]~~

$x \in (-1, 3/2]$

3) Երկքառակուսի հավասարման լուծումների քանակը

$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (*)$ (լուծումները՝ x_1, x_2, x_3, x_4)

կատարենք $t = x^2$ նշանակումը՝

$at^2 + bt + c = 0 \quad (**)$ (լուծումները՝ t_1, t_2):

ա) $D < 0 \Rightarrow (**)$-ը լուծում չունի $\Rightarrow (*)$ լուծում չունի:

կամ
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow (**)\text{-ը ունի 2 հատ (կամ } t_1 = t_2 < 0 \text{ մեկ) բացասական արմատ} \Rightarrow (*)\text{-ը լուծում չունի:}$$

բ) Եթե $\begin{cases} c = 0 \\ a \cdot b > 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 < 0 \Rightarrow (*)$-ը ունի մեկ լուծում՝ $x = 0$

գ) Եթե $\begin{cases} D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$ (ավելորդ է գրել) $\Rightarrow (**)$-ը ունի տարբեր նշաններով արմատներ ($t_1 < 0,\ t_2 > 0$) $\Rightarrow (*)$-ը ունի երկու արմատ՝
$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_2}$

կամ $\begin{cases} D = 0 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow (**)$-ը ունի $t_1 = t_2 > 0$ մեկ արմատ $\Rightarrow (*)$-ը ունի երկու արմատ՝ $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$:

դ) Եթե $\begin{cases} c = 0 \\ a \cdot b < 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 > 0 \Rightarrow (*)$-ը ունի 3 արմատ՝
$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{t_2}$

ե) Եթե $\begin{cases} D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow (**)$-ը ունի 2 դրական տարբեր արմատներ, $t_1 > 0,\ t_2 > 0 \Rightarrow (*)$-ը ունի 4 արմատ՝
$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$

Օրինակ

Բանկ 6գ-33

$y = x^2 + (3a+2)x + 8a + 14 = 0$

$x_1 < 1, \quad x_2 > 1$

a — ?

I եղանակ (կոպիտ ձև)

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 = \frac{-3a-2-\sqrt{(3a+2)^2 - 4(8a+14)}}{2} < 1 \\ x_2 = \frac{-3a-2+\sqrt{(3a+2)^2 - 4(8a+14)}}{2} > 1 \end{cases}$$

Առաջանում բարդ իռացիոնալ անհավասարումներ:

II եղանակ (գրաֆիկական)

$y = f(x)$

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (3a+2)^2 - 4(8a+14) > 0 \\ 1^2 + (3a+2) \cdot 1 + 8a + 14 < 0 \end{cases}$$

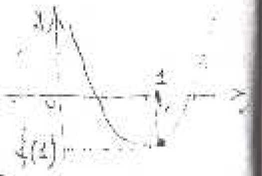
$$\begin{cases} 9a^2 - 20a - 52 > 0 \\ 11a + 17 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{568}}{9} \\ a < -\frac{17}{11} \end{cases}$$

Պարզ է, որ $a_1 = \frac{10+\sqrt{568}}{9} > -\frac{17}{11}$ (տես 1)

$a_2 - \left(-\frac{17}{11}\right) = \frac{10-\sqrt{568}}{9} + \frac{17}{11} = \frac{263 - 11\sqrt{568}}{99} = \frac{\sqrt{69169} - \sqrt{68728}}{99} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 > -\frac{17}{11}$

Պատ.՝ $a \in \left(-\infty; -\frac{17}{11}\right)$



5գ-80 $Ax^2 + Bx + C = 0$

$x^4 - 2(a-1)x^2 - a^2 - a = 0$ ունի միայն երկու լուծում

a — ?

Ն. $x^2 = t > 0$

$t^2 - 2(a+1)t - a^2 - a = 0$ $\quad \begin{vmatrix} A = 1 \\ B = -2(a+1) \\ C = -a^2 - a \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} C = -a^2 - a = 0 \\ A \cdot B = -2(a+1) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0,\ a_2 = -1 \\ a > -1 \end{cases}$$

Պատ.՝ $a = 0$;

5ա-13 33
գ-13

5-ը $ax^2+bx-5=0$ $(a>0)$ հավասարման արմատն է։ Գտնել $ax^4+bx^2-5=0$ հավ. արմատները

Հայտնի է, որ $t_1=5$-ը $at^2+bt-5=0$ հավասարման արմատն է։ Լուծել երկքառակուսային հավասարումը։ Նշ. $x^2=t\geq 0$։

Համաձայն [illegible] $at^2+bt-5=0$; $t_1=5$

$t_1 \cdot t_2 = -\frac{5}{a}$	
$t_1+t_2 = -\frac{b}{a}$	

$$\begin{cases} a>0 \\ t_1=5>0 \\ t_1 \cdot t_2 = 5 \cdot t_2 = -\frac{5}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow t_2<0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ երկքառ. հավ. լուծում կլինի $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$ Պատ. $\pm\sqrt{5}$

4ա-5
գ-5

$$\begin{cases} (-2x+5)(x-1)\geq 0 \\ a-3x\leq 1 \end{cases}$$

Համակարգը լուծում չունի

a —— ?

$$\begin{cases} 2x^2-7x+5<0 \\ x\geq \frac{a-1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=1,\ x_2=5/2 \\ x\geq \frac{a-1}{3} \end{cases}$$

Համակարգը լուծում չի ունենա, երբ $\frac{a-1}{3}\geq\frac{5}{2}$;

$2a-2\geq 15 \Rightarrow a\geq\frac{17}{2}$

Պատ. $a\in\left[\frac{17}{2};\infty\right)$

4գ-23

$$\begin{cases} 5-3x\leq 0{,}5(2+x) \\ 6x-a\leq 3 \end{cases}$$

Համակարգի լուծումների բազմությունը պարունակում է միայն երկու ամբողջ թիվ

a —— ?

$$\begin{cases} 3{,}5x\geq 4 \\ 6x\leq 3-a \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 8/7 \\ x\leq\frac{3-a}{6} \end{cases}$$

Միայն երկու ամբողջ թիվ [illegible] երբ

$4\leq\frac{3-a}{6}<5$

$24\leq 3-a<30$

$21\leq -a<27$

$-27<a\leq -21$ Պատ. $a\in(-27;-21]$

5ա-23 51

$x^2+2ax-1=0$

հավասարման արմատների տարբերությունը 2 է։

a —— ?

$D=a^2+1>0 \Rightarrow$ [illegible]

$x_2-x_1=2$.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-a-\sqrt{a^2+1} \\ x_2&=-a+\sqrt{a^2+1} \end{aligned}\right| \Rightarrow x_2-x_1=$$

$=-a+\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{a^2+1}$

$2\sqrt{a^2+1}=2 \Rightarrow a^2+1=1 \Rightarrow a=0$

Պատ. $a=0$

5ա-54

$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^2-2a^2+7a}=0,\ a>0$

Քանի որ $\sqrt{x-a}\geq 0$ և $\sqrt{x^2-2a^2+7a}\geq 0$ [illegible] $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x-a}=\sqrt{x^2-2a^2+7a}=0$ երբ

$$\begin{cases} \sqrt{x-a}=0 \\ \sqrt{x^2-2a^2+7a}=0 \\ a>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-a=0 \\ x^2-2a^2+7a=0 \\ a>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=a \\ a^2-2a^2+7a=0 \\ a>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=a \\ a_1=0,\ a_2=7 \\ a>0 \end{cases}$$

Պատ. $a=7$.

Մոդուլով հավասարումներ

1) $|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ կամ ա) $f(x) = g(x)$ բ) $f(x) = -g(x)$ ստուգում

Օրինակ $|2x-1| = 3x+6$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 = 3x+6 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-1) = 3x+6 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -7 \\ x \geq 1/2 \end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases} x = -1 \\ x < 1/2 \end{cases} \end{array}\right.$ $x = -1$

Պատ. $x = -1$

2) $|f(x)| \pm |g(x)| = p(x)$ միջակայքերի մեթոդով:

Օրինակ $|x+1| = 2|x-1| + x$

ենթամոդուլային արտահայտությունների 0-ները $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

ա) $x \in (-\infty; -1] \Rightarrow \begin{matrix} x+1 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} |x+1| = -(x+1) = -x-1 \\ |x-1| = -(x-1) = 1-x \end{matrix} \Rightarrow$ հավասարումը կլինի

$\Rightarrow -x-1 = -2x+2+x \Rightarrow 0 = 3\ \varnothing$

բ) $x \in (-1; 1) \Rightarrow \begin{matrix} x+1 > 0 \\ x-1 < 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = 1-x \end{matrix} \Rightarrow$ հավասարումը կլինի

$x+1 = 2-2x+x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$ լուծում է

գ) $x \in [1; \infty) \Rightarrow \begin{matrix} x+1 > 0 \\ x-1 \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = x-1 \end{matrix} \Rightarrow$ հավասարումը կլինի

$x+1 = 2x-2+x \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1; \infty)$ լուծում է

Պատ. $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 3/2$

Մոդուլով անհավասարումներ

1) $|f(x)| \leq g(x) \iff -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ կամ $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$

Օրինակ $|2x^2-13x+17| \leq 7-x$

$\begin{cases} 2x^2-13x+17 \leq 7-x \\ 2x^2-13x+17 \geq -(7-x) \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-6x+5 \leq 0 \\ x^2-7x+12 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2; 3] \\ x \in (-\infty; 3] \cup [4; \infty) \end{cases}$ Պատ. $x \in [2; 3]$

2) $|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{array}\right.$

Օրինակ $|4x^2-2x-37| > 13-4x$

$\left[\begin{array}{l} 4x^2-2x-37 < 4x-13 \\ 4x^2-2x-37 > 13-4x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-9 < 0 \\ 2x^2+x-22 > 0 \end{array}\right.$

Պատ. $x \in (-\infty; -4) \cup (-3/2; 3) \cup (\frac{11}{2}; \infty)$ $x \in (-4; -3/2) \cup (3; 11/2)$

Օրինակ $2|x-1| + |3x+4| \leq 5x+2$ 0-ները $-4/3$, 1

ա) $x \in (-\infty; -4/3)$

$-2x+2-3x-4 \leq 5x+2 \Rightarrow x \geq -2/5$ $\varnothing$

բ) $x \in [-4/3; 1]$

$-2x+2+3x+4 \leq 5x+2 \Rightarrow x \geq 1$ $x = 1$

գ) $x \in (1; \infty)$

$2x-2+3x+4 \leq 5x+2$ $x \in (1; \infty)$

$2 \leq 2$

Պատ. $[1; \infty)$

Իռացիոնալ հավասարումներ

$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff$ ա) $\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{Թ.Ա.Տ.} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$ բ) կամ ստուգումով $f(x) = [g(x)]^2$

Օրինակ $\sqrt{2x+3} = x-6$

I եղանակ $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x-6 \geq 0 \\ 2x+3 = (x-6)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3/2 \\ x \geq 6 \\ x^2-14x+33 = 0 \\ x_{1,2} = 7 \pm 4 \end{cases}$ (−3/2; 6; 3; 11)

Պատ. $x = 11$

II եղանակ $2x+3 = x^2-12x+36$
$x^2-14x+33$ $x_1 = 3$ չի բավ. $x_2 = 11$ բավ. Պատ. 11։

$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = P(x) \iff$ ա) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}\right)^2 = [P(x)]^2 \end{cases}$

բ) կամ ստուգումով

Օրինակ $\sqrt{6x-2} - 2\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-6}$
$\sqrt{2x-6} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{6x-2}$
$2x-6+4\sqrt{2x^2-4x-6}+4x+4 = 6x-2$
$\sqrt{2x^2-4x-6} = 0$ կամ $2x^2-4x-6 = 0$
$x^2-2x-3 = 0$ $x_1 = -1$ չի բավ., $x_2 = 3$ բավ. է

Պատ. 3

Օրինակ $(x-1)\sqrt{x^2-x-6} = 6x-6$
$(x-1)\sqrt{x^2-x-6} - 6(x-1) = 0$
$(x-1)(\sqrt{x^2-x-6} - 6) = 0$

ա) $x-1 = 0$ $x_1 = 1$ չի բավ. է, արմատատակ արտահայտությունը < 0։

բ) $\sqrt{x^2-x-6} - 6 = 0$
$x^2-x-6 = 36$
$x^2-x-42 = 0$
$x_1 = -6$, $x_2 = 7$ բավ. է

Պատ. -6; 7

Իռացիոնալ անհավասարումներ

1) $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \leftarrow \text{Թ.Ա.Տ.} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$ (կամ Թ.Ա.Տ.-ը առանձին)

Օրինակ 6բ–5 $\sqrt{5x+4} - 2 \leq x$
$\sqrt{5x+4} \leq x+2$
$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 5x+4 \leq x^2+4x+4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-x \geq 0 \end{cases}$ (−2; 0; 1)
$x \in [-2; 0] \cup [1; \infty)$

Թ.Ա.Տ. $5x+4 \geq 0$, $x \geq -4/5$, $x \in [-4/5; \infty)$

Պատ. (−2; −4/5; 0; 1) $x \in [-4/5; 0] \cup [1; \infty)$

---

2) $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff$ համախումբ ա) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \leftarrow \text{Թ.Ա.Տ.} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$ բ) $\begin{cases} g(x) < 0 \\ \text{Թ.Ա.Տ.} - f(x) \geq 0 \end{cases}$ կամ Թ.Ա.Տ.-ը առանձին։

Օրինակ Ա-ի 1337
$4x - \sqrt{6x^2-18x+12} \leq 10$
$\sqrt{6x^2-18x+12} \geq 4x-10$

ա) $\begin{cases} 4x-10 \geq 0 \\ 6x^2-18x+12 \geq 16x^2-80x+100 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 5/2 \\ 5x^2-31x+44 \leq 0 \\ x_1 = 2{,}2; \ x_2 = 4 \end{cases}$

Թ.Ա.Տ. $6x^2-18x+12 \geq 0$, $x^2-3x+2 \geq 0$ (1; 2), $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty)$

(2,2; 2,5; 4) $x \in [2{,}5; 4]$

բ) $\begin{cases} 4x-10 < 0 \\ \text{Թ.Ա.Տ.} \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-10 < 0 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases}$ (1; 2; 5/2) $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 5/2)$

$\begin{cases} x < 5/2 \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty) \end{cases}$

$x \in [2{,}5; 4]$

Պատ. (1; 2; 5/2; 4) $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 4]$

3) $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \geq 0 \iff \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \right.$ ← Ո.Ա.Տ. ; $f(x) = 0$

$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ [illegible]

Օրինակ $6_p - 14$

$$(x-2)\sqrt{11x-5-2x^2} \geq 0$$

[illegible] $\sqrt{11x-5-2x^2} \geq 0$ [illegible] (Ո.Ա.Տ.-ում) ⇒

Ո.Ա.Տ. $2x^2 - 11x + 5 \leq 0$, $x_{1,2} = \frac{11 \pm 9}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 5$; $x \in [\frac{1}{2}; 5]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 0 \\ 11x-5-2x^2 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 5 \end{array}\right.$

Պատ. $x \in [2; 5] \cup \{\frac{1}{2}\}$

---

4) $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \leq 0 \iff \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \right.$ ← Ո.Ա.Տ. ; $f(x) = 0$

Օրինակ [illegible] 1317

$$(2x^2 - 11x + 15)\sqrt{7-6x-x^2} \leq 0$$

[illegible] $\sqrt{7-6x-x^2} \geq 0$ [illegible] (Ո.Ա.Տ.-ում) ⇒

Ո.Ա.Տ. $7 - 6x - x^2 \geq 0$, $x^2 + 6x - 7 \leq 0$, $x_1 = -7$, $x_2 = 1$; $x \in [-7; 1]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 11x + 15 \leq 0 \\ 7 - 6x - x^2 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2{,}5 \ldots 3 \\ x_1 = -7,\ x_2 = 1 \end{array}\right.$

Պատ. $x_1 = -7$, $x_2 = 1$

---

5) $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$ ← Ո.Ա.Տ.

---

6) $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$ ← Ո.Ա.Տ.

---

7) $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq P(x) \iff \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 \geq [P(x)]^2 \end{cases}\right.$ ← Ո.Ա.Տ. ; $\begin{cases} P(x) < 0 \\ \text{Ո.Ա.Տ.} \end{cases} \begin{cases} P(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

[illegible] Ո.Ա.Տ.-ը [illegible]

---

8) $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq P(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 \leq [P(x)]^2 \end{cases}$ ← Ո.Ա.Տ.

[illegible] Ո.Ա.Տ.-ը [illegible]

---

9) $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{P(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 \geq P(x) \end{cases}$ ← Ո.Ա.Տ.

[illegible] Ո.Ա.Տ.-ը [illegible]

Օրինակ 1381 [illegible]

$$\sqrt{2x-8} + \sqrt{x-5} > \sqrt{3x-9}$$

Ո.Ա.Տ. $\begin{cases} 2x - 8 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \\ 3x - 9 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$, $x \in [5; \infty)$

$$2x - 8 + 2\sqrt{2x^2 - 18x + 40} + x - 5 > 3x - 9$$

$$\sqrt{2x^2 - 18x + 40} > 4$$

$\begin{cases} 2x^2 - 18x + 40 > 16 \\ 2x^2 - 18x + 40 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 9x + 12 > 0 \\ x^2 - 9x + 20 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{2} \\ x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{2} \end{cases}$

$x \in (-\infty; \frac{9-\sqrt{33}}{2}) \cup (\frac{9+\sqrt{33}}{2}; \infty)$

Պատ. $x \in (\frac{9+\sqrt{33}}{2}; \infty)$

(c) 41

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{p(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{p(x)} + \sqrt{g(x)} \leq \sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{p(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 \leq f(x) \end{cases}$ ← Թ.Ա.Տ.

1327 խնդիր

$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+2} < \sqrt{3x+2}$

$x-2+2\sqrt{2x^2-2x-4}+2x+2 < 3x+2$

$\sqrt{2x^2-2x-4} < 1$

$\begin{cases} 2x^2-2x-4 \geq 0 \\ 2x^2-2x-4 < 1 \end{cases} \begin{cases} x^2-x-2 \geq 0 \\ 2x^2-2x-5 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} \end{cases}$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{11}}{2}; -1\right] \cup \left[2; \frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)$

(number line: $\frac{1-\sqrt{11}}{2}$, -1, 2, $\frac{1+\sqrt{11}}{2}$)

Թ.Ա.Տ.

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x+2 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x \geq -2/3 \end{cases}$

$x \in [2; \infty)$

Պատ. $x \in \left[2; \frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)$

1353 խնդիր

$\sqrt{x+4} + \sqrt{1-x} < \sqrt{3-2x}$

$x+4+2\sqrt{x^2-3x+4}+1-x < 3-2x$

$\sqrt{x^2-3x+4} < -1-x$

$\begin{cases} -1-x > 0 \\ x^2-3x+4 < x^2+2x+1 \\ x^2-3x+4 \geq 0 \quad D<0 \end{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x > 3/5 \\ -\infty < x < \infty \end{cases}$

Թ.Ա.Տ.

$\begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq 1 \\ x \leq 3/2 \end{cases}$

$x \in [-4; 3/2]$

$\varnothing$

(number line: -1, $3/5$)

Պատ. $\varnothing$

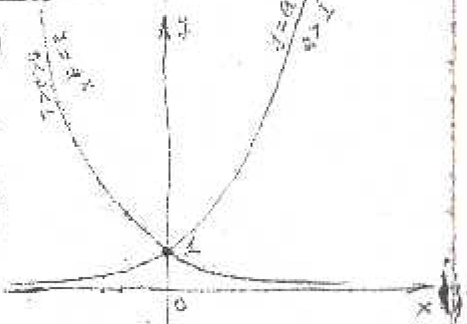
43

Ցուցչային ֆունկցիա

$y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$

1) Որոշման տիրույթը՝ $D(x): \{x / x \in (-\infty; +\infty)\}$

2) Արժեքների տիրույթը՝ $E(y): \{y / y \in (0; +\infty)\}$



3) երբ $a > 1$ — աճող է (գրաֆիկը բարձրանում է), երբ $x \to -\infty \Rightarrow y \to 0$

երբ $0 < a < 1$ — նվազող է (գրաֆիկը իջնում է), երբ $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$:

Ցուցչային հավասարումներ

$$a^x = a^b \iff x = b$$

Օրինակ Կա-24

$3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$

$3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^{-x} = 28$

$3 \cdot 3^x + \frac{9}{3^x} = 28$

Նշ. $3^x = y$ $(y > 0)$

$3y + \frac{9}{y} = 28$

$3y^2 - 28y + 9 = 0$

ա) $y_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

բ) $y_2 = 9 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$

Ստուգումը՝ ...

Պատ.՝ $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Օրինակ Օր-5

$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ բաժանենք երկու կողմը՝ 2^{4x} -ի վրա

$3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x}$ $/ 2^{4x}$

$3 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{4x} = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$ Նշ. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = y > 0$

$3 + 2y^2 = 5y$

$2y^2 - 5y + 3 = 0$

$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$ / $y_1 = 1$, $y_2 = 3/2$

ա) $y = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$

բ) $y = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$] ստուգվում է:

Պատ. $x_1 = 0$ $x_2 = 1/2$

Օր-20

$4^{\frac{1}{x}} - 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$ բաժանենք երկու կողմը

$2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}$ $/ 2^{\frac{2}{x}}$

$1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2/x}$ Նշ. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y > 0$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

ա) $y = -1$ չի բավ.

բ) $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \log_{3/2} \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\log_{3/2} 1/2} = \log_{1/2} 3/2$

Պատ.՝ $x = \log_{1/2} 3/2$

44

4)

Լոգարիթմի գաղափարը

Սահմանում $\log_a b$-ն, դա այն c թիվն է, որ $a^c = b$, այսինքն

$$a^{\log_a b} = b \qquad a>0,\ a\neq 1,\ b>0$$

Հետևություն $a^c = b \iff c = \log_a b$

Օրինակ $\log_2 8 = 3$, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, $\log_{1/3} 27 = -3$

Հատկություններ

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5) $\log_a b^k = k \log_a b$ Օրինակ $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4$

6) $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$ Օրինակ $\log_{\sqrt[3]{3}} 9 = \log_{3^{1/3}} 3^2 = \ldots = -\frac{2}{3}$

7) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ Օրինակ $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$

8) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

9) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Հետևություն ... $\log_{10} b = \lg b$, $\log_e b = \ln b$

[illegible]

Հետևություն

ա) եթե $\left.\begin{matrix} a>1 \\ b>1\end{matrix}\right] \Rightarrow \log_a b > 0$ Օրինակ $\log_2 4 = 2 > 0$

եթե $\left.\begin{matrix} a>1 \\ 0<b<1\end{matrix}\right] \Rightarrow \log_a b < 0$ Օրինակ $\log_2 \frac{1}{4} = -2 < 0$

բ) եթե $\left.\begin{matrix} 0<a<1 \\ b>1\end{matrix}\right] \Rightarrow \log_a b < 0$ Օրինակ $\log_{1/2} 8 = -3 < 0$

եթե $\left.\begin{matrix} 0<a<1 \\ 0<b<1\end{matrix}\right] \Rightarrow \log_a b > 0$ Օրինակ $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3 > 0$

Օրինակ

$$3^{1+\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{2}} \cdot \lg\frac{3\pi}{4} \cdot \log_{\sqrt{2}} \ldots = 3 \cdot 3^{\log_3 2^{1/2}} \cdot (-1) \cdot \log_{2^{1/2}} 2^{-1} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^{\log_3 2} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

$$4^{1+\frac{1}{\log_3 2}} \cdot \log_{\sqrt{13}} 64 \cdot \log_{16} 169 = 4 \cdot 4^{\log_2 3} \cdot \log_{13^{1/2}} 2^6 \cdot \log_{2^4} 13^2 =$$

$$= 4 \cdot 2^{2\log_2 3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_{13} 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2 13 =$$

$$= 4 \cdot 2^{\log_2 9} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_{13} 2 \cdot \log_2 13 = 4 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\log_2 13} \cdot \log_2 13 = 216$$

$\log_{\sqrt{a}} a \cdot b^2 + \log_a b^3 = 16$ գտնել $\log_a b$-ն

$\log_{a^{1/2}} a + \log_{a^{1/2}} b^2 + 3\log_a b = 16$

$2\log_a a + 2\cdot 2\cdot \log_a b + 3\log_a b = 16$

$7\log_a b = 14$

$\log_a b = 2$ Պատ. $\boxed{2}$

17.5) $\log_{12}27=a$, $\log_6 2$ — ?

$a=\log_{12}3^3=3\log_{12}3=3\cdot\frac{1}{\log_3(3\cdot4)}=\frac{3}{\log_3 3+\log_3 4}=\frac{3}{1+\log_3 4}\Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{3}{1+2\log_3 2}\Rightarrow\log_3 2=\frac{3-a}{2a}$

Այժմ կգտնենք՝ $\log_6 2=\frac{1}{\log_2 6}=\frac{1}{\log_2 2+\log_2 3}=\frac{1}{1+\log_2 3}=\frac{1}{1+\frac{1}{\log_3 2}}=$

$=\frac{1}{1+\frac{2a}{3-a}}=\frac{3-a}{3-a+2a}=\frac{3-a}{3+a}$ Պատ.՝ $\boxed{\frac{3-a}{3+a}}$

14.5) $|21a-16|=22$, $\log_7(3-14a)$ — ?

1) $\begin{cases}3-14a>0\\21a-16=22\\21a-16\ge0\end{cases}$ $\begin{cases}a<\frac{3}{14}=\frac{3}{14}\\a=38/21=\frac{38}{21}\\a\ge16/21=\frac{16}{21}\end{cases}$

3/14, 16/21, 38/21 — $\varnothing$

2) $\begin{cases}21a-16<0\\21a-16=-22\\3-14a>0\end{cases}$ $\begin{cases}a<16/21\\a=-2/7\\a<3/14\end{cases}$

−2/7, 3/14, 16/21

$a=-2/7\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_7(3-14a)=\log_7(3+14\cdot\frac{2}{7})=\log_7(3+4)=\log_7 7=1$

Պատ.՝ $\boxed{1}$

14.19) $\log_{\sqrt5}(a-4)-\log_{1/\sqrt5}a=1$, $\log_{\sqrt3}(a-2)$ — ?

$1=\log_{\sqrt5}(a-4)-\log_{1/\sqrt5}a=$

$=\log_5(a-4)+\log_5 a=\log_5(a(a-4))$

Այսպիսով՝ $\log_5(a^2-4a)=1\Rightarrow a^2-4a=5$

$a^2-4a-5=0$

1) $a_1=-1$ չի բավ. ($\notin$ Թ.Ա.Բ.)

2) $a_2=5\Rightarrow\log_{\sqrt3}(a-2)=\log_{\sqrt3}(5-2)=$

$=\log_{\sqrt3}3=2\log_3 3=2$

Թ.Ա.Բ.

$\begin{cases}a-4>0\\3>0\\a-2>0\end{cases}$ $\begin{cases}a>4\\a>0\\a>2\end{cases}$

$a>4$

Պատ.՝ $\boxed{2}$

14.14) $\log_2 a-\log_{1/2}(a+3)=1+\log_2 5$, $\log_{1/\sqrt5}(a-1.8)$ — ?

Թ.Ա.Բ. $\begin{cases}a>0\\a+3>0\\a-1.8>0\end{cases}$ $\begin{cases}a>0\\a>-3\\a>1.8\end{cases}$ $a>1.8$

$\log_2 a+\log_2(a+3)=\log_2 2+\log_2 5=\log_2 10$

$\log_2(a^2+3a)=\log_2 10\Rightarrow a^2+3a=10$

$a^2+3a-10=0$

1) $a=-5$ չի բավ. ($\notin$ Թ.Ա.Բ.)

2) $a=2\Rightarrow\log_{1/\sqrt5}(a-1.8)=\log_{1/\sqrt5}(2-1.8)=\log_{5^{-1/2}}0.2=$

$=\log_{5^{-1/2}}\frac{1}{5}=-\frac{1}{\frac12}\log_5 5^{-1}=-2\cdot(-1)\cdot\log_5 5=2$

Պատ.՝ $\boxed{2}$

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$D(y): \{x / x \in (0; +\infty)\}$

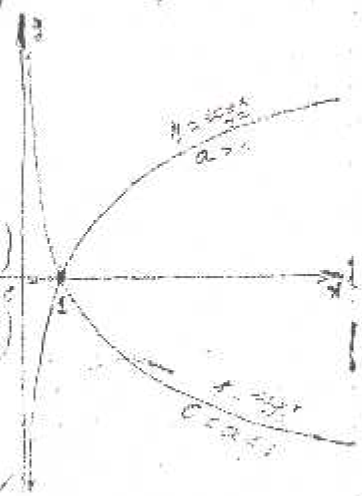
$E(y): \{y / y \in (-\infty; +\infty)\}$

$a > 1$ — $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$0 < a < 1$ — $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$\log_a x \to -\infty$, $\begin{cases} a > 1 \\ x \to 0 \end{cases}$

$\log_a x \to +\infty$, $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x \to 0 \end{cases}$



$$\log_a x = \log_a y \Longleftrightarrow x = y$$

$\log_2(3x+3) \cdot \log_{3x} 2 = 1$

$\log_2(3x+3) \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 1$

$\log_x(3x+3) = 2$

$x^2 = 3x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = 3$

Պատ. $\boxed{3}$

$\log_5(x-2) = 1 - \log_5(x-6)$

$\log_5(x-2) = \log_5 5 - \log_5(x-6)$

$\log_5(x-2) = \log_5 \frac{5}{x-6}$

$x - 2 = \frac{5}{x-6}$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 7$

Պատ. $\boxed{7}$

$\log_{x+1}(6x+1) = 2$

$6x + 1 = (x+1)^2$

$x^2 - 4x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

Պատ. $\boxed{4}$

$4 \cdot x^{\log_2 x} - 2^{1+\log_2^2 x} = 32$

$4 \cdot x^{\log_2 x} - 2 \cdot 2^{\log_2 x \cdot \log_2 x} = 32$

$4 \cdot x^{\log_2 x} - 2 \cdot (2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = 32$

$4 \cdot x^{\log_2 x} - 2 \cdot x^{\log_2 x} = 32$

$2 \cdot x^{\log_2 x} = 32$

$x^{\log_2 x} = 16$

$\log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 16$

$\log_2^2 x = 4$

1) $\log_2 x = -2$, $x_1 = \frac{1}{4}$

2) $\log_2 x = 2$, $x_2 = 4$

Պատ. $\boxed{\frac{1}{4}; 4}$

$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4 \\ \lg\frac{(x+y)^2}{x} = \lg 9 \end{cases}$ $\begin{cases} y + 2x = 4 \\ (x+y)^2 = 9x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 2x \\ (4-x)^2 = 9x \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ x^2 - 17x + 16 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 2 & y_2 = -28 \\ x_1 = 1, & x_2 = 16 \end{cases}$

Պատ. $(1; 2)$, $(16; -28)$

51

Լոգարիթմական անհավասարումներ

1) $\log_a x \geq \log_a y \iff$ ա) $x \geq y$, երբ $a>1$; բ) $x \leq y$, երբ $0<a<1$

2) $\log_a x \leq \log_a y \iff$ ա) $x \leq y$, երբ $a>1$; բ) $x \geq y$, երբ $0<a<1$

Հետևություն

1) $a^x \lessgtr b \iff$ ա) $x \lessgtr \log_a b$, երբ $a>1$; բ) $x \gtrless \log_a b$, երբ $0<a<1$

2) $\log_a x \lessgtr b \iff$ ա) $x \lessgtr a^b$, երբ $a>1$; բ) $x \gtrless a^b$, երբ $0<a<1$

Ցուցչային անհավասարումներ

1) $a^x > a^y \iff$ ա) $x>y$, երբ $a>1$; բ) $x<y$, երբ $0<a<1$

2) $a^x < a^y \iff$ ա) $x<y$, երբ $a>1$; բ) $x>y$, երբ $0<a<1$

Հետևություն ա) $\log_a b > 0 \iff$ ա) $b>1$, երբ $a>1$; բ) $0<b<1$, երբ $0<a<1$

բ) $\log_a b < 0 \iff$ ա) $b<1$, երբ $a>1$; բ) $b>1$, երբ $0<a<1$

4) $\log_a b > 1 \iff b > a$

Օրինակ

$7^{2x}+49\cdot 25^{x-1} < 2,96\cdot 35^x$ — Թ.Ա.Տ. $x\in(-\infty;\infty)$

$7^{2x}+\frac{49}{25}\cdot 5^{2x} < 2,96\cdot 7^x\cdot 5^x \quad / 5^{2x}$ բաժ.

$\left(\frac{7}{5}\right)^{2x} - 2,96\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^x + \frac{49}{25} < 0$

Նշ. $\left(\frac{7}{5}\right)^x = y > 0$

$25y^2 - 74y + 49 < 0$

$y_{1,2} = \frac{37\pm\sqrt{2}}{25}$

$y_1 = 1,\quad y_2 = \frac{49}{25}$

$1 < y < \frac{49}{25}$

$\begin{cases} y>1 \\ y<\frac{49}{25}\end{cases}$ $\begin{cases}\left(\frac{7}{5}\right)^x>1 \\ \left(\frac{7}{5}\right)^x<\left(\frac{7}{5}\right)^2\end{cases}$ $\begin{cases}x>0\\ x<2\end{cases}$

$x\in(0;2)$

Պատ. $x\in(0;2)$

Օրինակ

$2\cdot 3^{x+3} < 9+3^{x-1}$

$162\cdot 3^{x-1} < 9+3^{x-1}$

$161\cdot 3^{x-1} < 9$

$3^{x-1} < \frac{9}{161}$

$x-1 < \log_3\frac{9}{161}$

$x < 1+\log_3\frac{9}{161}$

Օրինակ

$4\cdot 6^x - 9\cdot 4^x < 0$

$4\cdot 6^x < 9\cdot 4^x \quad / 4^x$ բաժ.

$\left(\frac{6}{4}\right)^x < \frac{9}{4}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$x < 2$

Պատ. $x\in(-\infty;2)$

§ 3

Օրինակ

$4\cdot 3^{2x}+5\cdot 12^{x} \geq 3\cdot 2^{4x+1}$

$4\cdot 3^{2x}+5\cdot 3^{x}\cdot 4^{x} \geq 6\cdot 2^{4x} \;/\; 3^{2x}$

$6\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-4 \leq 0$

Նշ. $\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=y>0$

$6y^2-5y-4\leq 0$

$y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{4}{3}$

$0<y\leq 4/3$

$\begin{cases}\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>0\\ \left(\frac{4}{3}\right)^{x}\leq\frac{4}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}-\infty<x<\infty\\ x\leq 1\end{cases}$

Պատ. $x\in(-\infty;1]$

Օրինակ

$0{,}2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0{,}008^{2\log_4 x+1}}$

Թ. Ա. Ի.

$\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

$x\in(0;1)\cup(1;\infty)$

$0{,}2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}} > 0{,}2^{2\log_4 x-1}$

$\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x} < 2\log_4 x-1$

Նշ. $\log_4 x = y$

$\frac{6y-3}{y}<2y-1$

$\frac{2y^2-7y+3}{y}>0$

[illegible] $0;\ \frac{1}{2};\ 3$

$\left[\begin{array}{l}0<\log_4 x<\frac{1}{2}\\ \log_4 x>3\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}1<x<2\\ x>64\end{array}\right.$

$x\in(1;2)\cup(64;\infty)$

Պատ. $x\in(1;2)\cup(64;\infty)$

Օրինակ

$\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$

$\log_2\log_{x-1}9<1$

$\log_{x-1}9<2$

ա) $\begin{cases}0<x-1<1\\ 9>(x-1)^2\end{cases}$ $\begin{cases}1<x<2\\ x^2-2x-8<0\end{cases}$ $x_1=-2,\ x_2=4$

$x\in(1;2)$

բ) $\begin{cases}x-1>1\\ 9<(x-1)^2\end{cases}$ $\begin{cases}x>2\\ x^2-2x-8>0\end{cases}$

$x\in(4;\infty)$

Թ. Ա. Ի.

$\begin{cases}x-1>0\\ x-1\neq 1\\ \log_{x-1}9>0 \Rightarrow x-1>1\\ \log_2\log_{x-1}9>0\end{cases}$

$\begin{cases}x>1\\ x-1\neq 1\\ \log_{x-1}9>1\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\ x>2\\ 9>x-1\end{cases}$ $\begin{cases}x>2\\ x<10\end{cases}$

$x\in(2;10)$

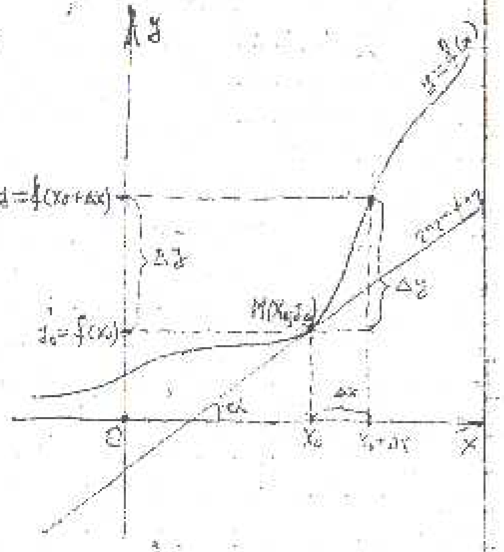
Պատ. $x\in(4;10)$

ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ

Դիցուք տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիան

x_0-ին տանք $\longrightarrow \Delta x$ աճ

y-ը կստանա — $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ աճ



Սահմանում՝ $\forall x$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ կոչվում է հետևյալ սահմանը՝

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

կամ

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը՝ x_0 կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը նրա գրաֆիկի $M(x_0,f(x_0))$ կետում տարված շոշափողի և OX առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյան (այսինքն շոշափողի անկյունային գործակիցը) տանգենսն է

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$$

Շոշափողի հավասարումը՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին x_0 աբսցիսով $M(x_0,f(x_0))$ կետում տարված շոշափողի հավասարումն է

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{կամ} \quad y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Խնդիր՝ Գրել $x_0=2$ կետում $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարված շոշափողի հավասարումը։

Լուծում՝ $y_0=f(x_0)=2^2=4$ | շոշափողի հավ.՝ $y-4=4(x-2)$

$y'=(x^2)'=2x \Rightarrow f'(2)=2\cdot 2=4$ | կամ $y=4x-4$ $(x=2)$

Ածանցման կանոնները

1) $C'=0$ (այսինքն հաստատունի ածանցյալը 0 է)

2) $(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x)$

$$x'=1$$

3) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

4) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

6) Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը

$$(f(☺))'=f'\cdot ☺'$$

Ածանցյալների աղյուսակը

			Բարդ ֆունկցիայի դեպքում
1) $y=x^m$	$y'=m\cdot x^{m-1}$	$y=☺^m$	$y'=m\cdot ☺^{m-1}\cdot ☺'$
2) $y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{☺}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{☺}}\cdot ☺'$
3) $y=\dfrac{1}{x}$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$	$y=\dfrac{1}{☺}$	$y'=-\dfrac{1}{☺^2}\cdot ☺'$
4) $y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^{☺}$	$y'=a^{☺}\cdot\ln a\cdot ☺'$
$y=e^x$	$(e^x)'=e^x$	$y=(e^{☺})$	$y'=e^{☺}\cdot ☺'$

Օրինակ՝ $y=2^{\sqrt{1+3x^3}}$ $\quad y'=2^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\ln 2\cdot(\sqrt{1+3x^3})'=$

$$=2^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+3x^3}}\cdot(1+3x^3)'=$$

$$=2^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+3x^3}}\cdot(0+3\cdot 3x^2)$$

$y = \log_a x \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad y = \log_a u \quad y' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

$y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x} \qquad y = \ln u \quad y' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$y = \ln \frac{2x^2 - \frac{1}{3x}}{\sqrt{1+3^{2x^2}}}$ [illegible]

$$y' = \frac{1}{\frac{2x^2 - \frac{1}{3x}}{\sqrt{1+3^{2x^2}}}} \cdot \frac{\left(2x^2 - \frac{1}{3x}\right)' \sqrt{1+3^{2x^2}} - \left(\sqrt{1+3^{2x^2}}\right)' \left(2x^2 - \frac{1}{3x}\right)}{1+3^{2x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+3^{2x^2}}}{2x^2 - \frac{1}{3x}} \cdot \frac{\left(4x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\sqrt{1+3^{2x^2}} - \frac{3^{2x^2} \ln 3 \cdot 4x}{2\sqrt{1+3^{2x^2}}}\left(2x^2 - \frac{1}{3x}\right)}{1+3^{2x^2}}$$

$y = \sin x \quad y' = \cos x \qquad y = \sin u \quad y' = \cos u \cdot u'$

$y = \cos x \quad y' = -\sin x \qquad y = \cos u \quad y' = -\sin u \cdot u'$

$y = tg\, x \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad y = tg\, u \quad y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$y = ctg\, x \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad y = ctg\, u \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$y = ctg\left(\cos\left(\log_2\left(3^{\sqrt{tg^3 \frac{1}{x}}}\right)\right)\right)$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2\left(\cos\left(\log_2 3^{\sqrt{tg^3 \frac{1}{x}}}\right)\right)} \cdot \left(-\sin\left(\log_2\left(3^{\sqrt{tg^3 \frac{1}{x}}}\right)\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{3^{\sqrt{tg^3 \frac{1}{x}}} \cdot \ln 3} \cdot 3^{\sqrt{tg^3 \frac{1}{x}}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{tg^3 \frac{1}{x}}} \cdot 3 \cdot tg^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

[illegible]

(2) $y = \frac{x}{x^2+1} \qquad y' = \frac{x'(x^2+1) - (x^2+1)' \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

(3) $y = \frac{x \cdot \sin x}{x-3} \qquad y' = \frac{(x \cdot \sin x)' \cdot (x-3) - (x-3)' x \cdot \sin x}{(x-3)^2} =$

$$= \frac{(x' \sin x + (\sin x)' x)(x-3) - 1 \cdot x \cdot \sin x}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x + x\cos x)(x-3) - x \cdot \sin x}{(x-3)^2} = \frac{x^2\cos x - 3x\cos x - 3\sin x}{(x-3)^2}$$

(8) $y = x \sin^3 x + \cos^3 2x$

$y' = x' \sin^3 x + x(\sin^3 x)' + 3\cos^2 2x \cdot (\cos 2x)' =$

$= \sin^3 x + 3x\sin^2 x (\sin x)' + 3\cos^2 2x(-\sin 2x)(2x)' =$

$= \sin^3 x + 3x\sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^2 2x \cdot \sin 2x \cdot 2$

(4) $x_0 = 2$ [illegible] $y = x^2$ [illegible]

$y' = 2x \qquad y'(x_0) = 2 \cdot 2 = 4$

(6) $f(x) = \frac{x-2}{\cos x}$ [illegible] $f'(0)$

$f'(x) = \frac{(x-2)' \cdot \cos x - (\cos x)'(x-2)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + \sin x \cdot (x-2)}{\cos^2 x}$

$f'(0) = \frac{\cos 0 + \sin 0 \cdot (0-2)}{\cos^2 0} = \frac{1+0}{1} = 1$

Շոշափողի հավասարումը

Խնդ. 41

$f(x)=2\cdot(1+x^2)^{-1}, \quad x_0=-1$

Լուծում Շոշափողի հավասարումն է $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $\boxed{(k=f'(x_0))}$

$y_0=f(x_0)=2\cdot(1+(-1)^2)^{-1}=2\cdot 2^{-1}=2\cdot\frac{1}{2}=1, \quad y_0=1$

$y'=f'(x)=\left(\frac{2}{1+x^2}\right)'=2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=2\cdot\left(-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x\right)=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

$f'(x_0)=f'(-1)=-\frac{4\cdot(-1)}{(1+(-1)^2)^2}=\frac{4}{(1+1)^2}=\frac{4}{4}=1, \quad f'(-1)=1$

Շոշափողը $y-1=1\cdot(x-(-1))$ կամ $\boxed{y=x+2}$ $(y=kx+b)$

Խնդ. 56 $y=tg 2x, \quad y=2x \quad (k=2)$

Լուծում $y'=\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'=\frac{2}{\cos^2 2x}$.

[illegible] $y'(x)=2 \quad (k=tg\alpha=y'(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{\cos^2 2x}=2 \Rightarrow \cos^2 2x=1 \Rightarrow \cos 2x=\pm 1$

ա) $\cos 2x=-1 \Rightarrow 2x=\pi+2\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

բ) $\cos 2x=1 \Rightarrow 2x=2\pi k \Rightarrow x=\pi k$

Պատ. $x=\pi k, \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

Խնդ. 57 $y=\sin 2x, \quad \varphi=60^\circ$

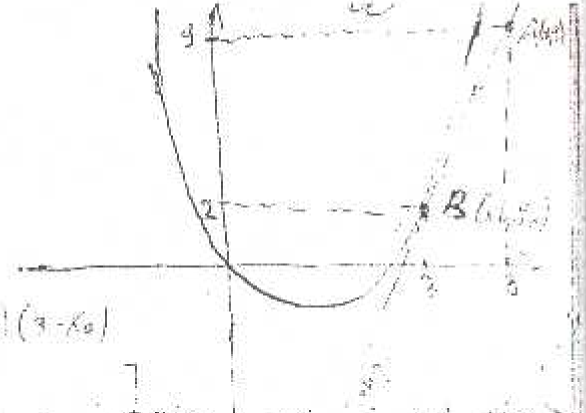
Լուծում [illegible] $y'(x_0)=tg 60^\circ=\sqrt{3}$

$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x \Rightarrow 2\cos 2x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$x_0=\pm\frac{\pi}{12}+\pi k$ Պատ. $x_0=\pm\frac{\pi}{12}+\pi k$

Խնդ. 25 $f(x)=3x^2-5x$, $A(3;9)$ [illegible]



Լուծում

[illegible] $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$A \in$ [illegible] $\Rightarrow 9-y_0=f'(x_0)(3-x_0)$

$y_0=f(x_0)=3x_0^2-5x_0$

$f'(x)=6x-5 \Rightarrow f'(x_0)=6x_0-5$ [illegible]

$9-3x_0^2+5x_0=(6x_0-5)(3-x_0)$

$3x_0^2-18x_0+24=0$

$x_0^2-6x_0+8=0$

ա) $x_0=2 \Rightarrow y_0=3x_0^2-5x_0=2 \quad B(2,2), \quad f'(2)=7$

բ) $x_0=4 \Rightarrow y_0=3x_0^2-5x_0=28 \quad B'(4,28), \quad f'(4)=19$

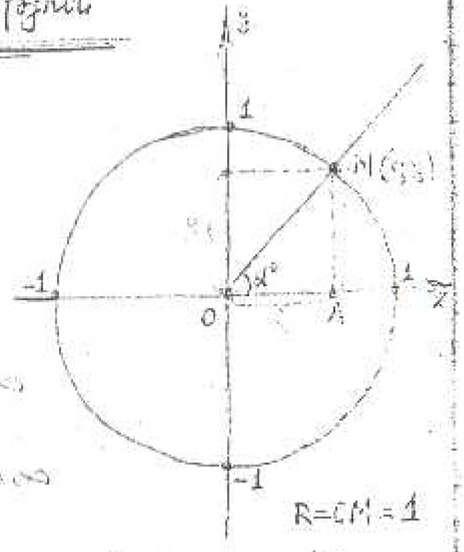
[illegible] A [illegible] $f(x)=3x^2-5x$ [illegible]

I) $y-2=7(x-2)$ կամ $y=7x-12$

II) $y-28=19(x-4)$ կամ $y=19x-48$

Պատ. $y=7x-12$
$y=19x-48$

[illegible]



$\sin\alpha^\circ = \frac{y}{R} = y \qquad -1 \le \sin\alpha \le 1$

$\cos\alpha^\circ = \frac{x}{R} = x \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$

$tg\alpha^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha^\circ}{\cos\alpha^\circ} \qquad -\infty < tg\alpha^\circ < +\infty$

$ctg\alpha^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha^\circ}{\sin\alpha^\circ} \qquad -\infty < ctg\alpha^\circ < +\infty$

1) $tg\alpha^\circ = \frac{1}{ctg\alpha^\circ}, \quad ctg\alpha^\circ = \frac{1}{tg\alpha^\circ}$ ① $\boxed{tg\alpha^\circ \cdot ctg\alpha^\circ = 1}$

2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = y^2 + x^2 = OM^2 = R^2 = 1^2 = 1$

② $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\end{matrix}}$

[illegible] $\pm 360^\circ$ [illegible]

$\sin(\alpha^\circ \pm 360^\circ) = \sin\alpha^\circ \qquad \cos(\alpha^\circ \pm 360^\circ) = \cos\alpha^\circ$

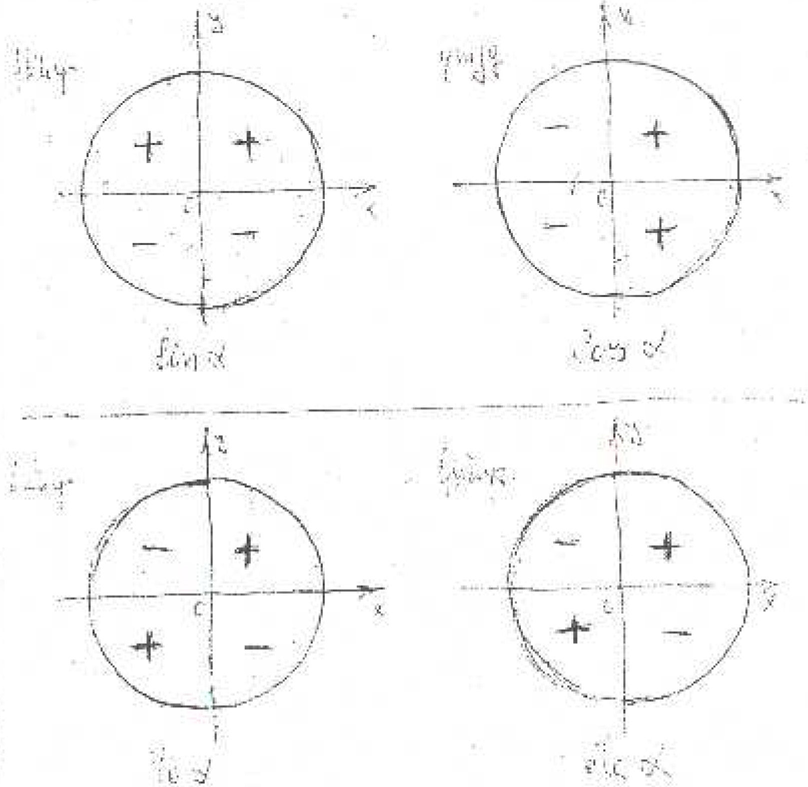
$tg(\alpha^\circ \pm 360^\circ) = tg\alpha^\circ \qquad ctg(\alpha^\circ \pm 360^\circ) = ctg\alpha^\circ$

[illegible] $n \cdot 360^\circ$ [illegible]

$\sin(\alpha^\circ \pm 360^\circ n) = \sin\alpha^\circ \qquad \cos(\alpha^\circ \pm 360^\circ n) = \cos\alpha^\circ$

$tg(\alpha^\circ \pm 360^\circ n) = tg\alpha^\circ \qquad ctg(\alpha^\circ \pm 360^\circ n) = ctg\alpha^\circ$

[illegible]



[illegible]

[illegible] 1 [illegible]

$|\overset{\frown}{AB}| = R \qquad (R = OA = OB)$

$\boxed{1 \text{ [illegible]} = \frac{180^\circ}{\pi}} \qquad \boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ [illegible]}}$

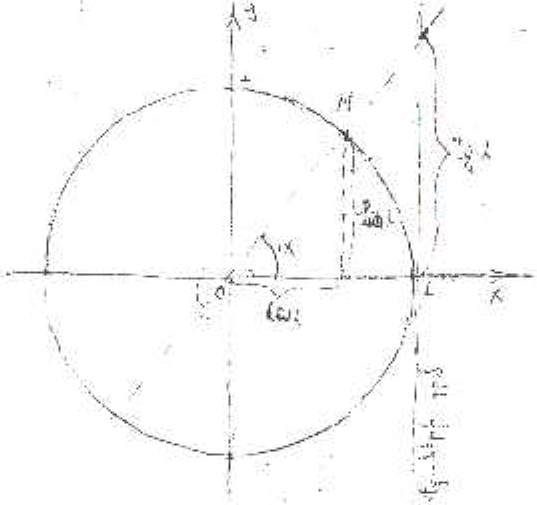
$30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, [illegible]

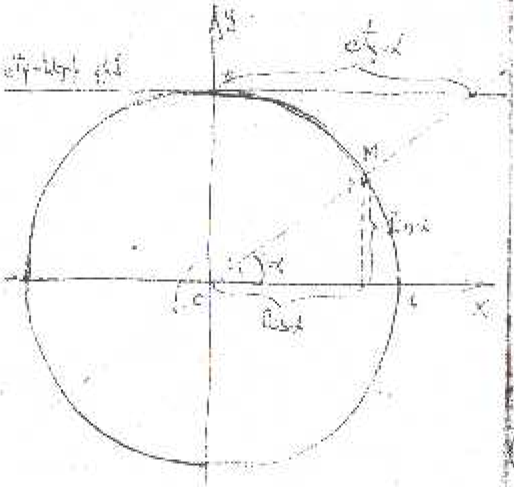
$135^\circ = \frac{3\pi}{4}, \quad 150^\circ = \frac{5\pi}{6}, \quad 180^\circ = \pi, \quad 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$, [illegible]

$240^\circ = \frac{4\pi}{3} \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}, \quad 300^\circ = \frac{5\pi}{3}, \quad 315^\circ = \frac{7\pi}{4}, \quad 360^\circ = 2\pi$

[illegible]

α	0 / 0°	$\frac{\pi}{6}$ / 30°	$\frac{\pi}{4}$ / 45°	$\frac{\pi}{3}$ / 60°	$\frac{\pi}{2}$ / 90°	$\frac{2\pi}{3}$ / 120°	$\frac{3\pi}{4}$ / 135°	$\frac{5\pi}{6}$ / 150°	π / 180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	[illegible]	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	[illegible]	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	[illegible]
$-\alpha$	[illegible]	[illegible] / $-330°$	[illegible] / $-315°$	[illegible] / $-300°$	[illegible] / $-270°$	[illegible] / $-240°$	[illegible] / $-225°$	[illegible] / $-210°$	$-\pi$ / $-180°$





[illegible] $y = f(x)$ [illegible] $\exists\ T$ [illegible] $f(x+T) = f(x)$: T-ն [illegible]
[illegible] nT-ն [illegible] $(n = \pm 1; \pm 2; \ldots)$

[illegible] 1) $y = \sin x$ և $y = \cos x$ [illegible] $T = 360°$ [illegible] $T = 2\pi$

2) $y = tg\,x$ և $y = ctg\,x$ [illegible] $T = 180°$ [illegible] $T = \pi$:

[illegible] $\sin(x \pm 360°) = \sin x$, $\cos(x \pm 360°) = \cos x$, $tg(x \pm \pi) = tg\,x$, $ctg(x \pm 180°) = ctg\,x$

(3)

[illegible]

x	$180°+\alpha$	$180°-\alpha$	$360°+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,x$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
$ctg\,x$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$

X	$90°+\alpha$	$90°-\alpha$	$270°+\alpha$	$270°-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$tg\,x$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
$ctg\,x$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$

[illegible]

(4) $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, + [illegible] $\alpha \in$ I, II [illegible]; − [illegible] $\alpha \in$ III, IV [illegible]

(5) $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, + [illegible] $\alpha \in$ I, IV [illegible]; − [illegible] $\alpha \in$ II, III [illegible]

(6) $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ (7) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

(8) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

(9) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

(10) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(11) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(12) $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$ (13) $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$

[illegible]

14 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ կամ $\sin\omega = 2\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{\omega}{2}$

15 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ կամ $\cos\omega = \cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2}$

16 $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ կամ $\operatorname{tg}\omega = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}$

17 $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ կամ $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$; $\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{1-\cos\omega}{2}$

18 $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ կամ $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$; $2\cos^2\frac{\omega}{2} = 1+\cos\omega$

19 $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ (20) $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

21 $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

22 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

23 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

24 $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

25 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

26 $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

27 $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

28 $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

29 $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x

1) **Սահմանում** arcsin x-ը այն α անկյունն է $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքից, որի սինուսը հավասար է x-ի

$\sin\alpha = x$

Օրինակ $\arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ$, որովհետև $30^\circ \in [-90^\circ; 90^\circ]$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60^\circ$, որովհետև $-60^\circ \in [-90^\circ; 90^\circ]$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, որովհետև $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

2) **Սահմանում** arccos x-ը այն α անկյունն է $[0, \pi]$ միջակայքից, որի կոսինուսը հավասար է x-ի

$\cos\alpha = x$

Օրինակ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$, որովհետև $135^\circ \in [0; 180^\circ]$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0^\circ$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$

3) **Սահմանում** arctg x-ը այն α անկյունն է $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքից, որի տանգենսը հավասար է x-ի

$\operatorname{tg}\alpha = x$ ($\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ կենտ)

Օրինակ $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ$,

$\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg}(+\infty) = 90^\circ$, $\operatorname{arctg}(-\infty) = -90^\circ$

4) **Սահմանում** arcctg x-ը այն α անկյունն է $(0; \pi)$ միջակայքից, որի կոտանգենսը հավասար է x-ի

$\operatorname{ctg}\alpha = x$

Օրինակ $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 120^\circ$

$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg}(+\infty) = 0^\circ$, $\operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi$

67 ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1°. $\sin x = a$, $-1 \le a \le 1$ $\quad \boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k}$ $\quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

2°. $\cos x = a$, $-1 \le a \le 1$ $\quad \boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k}$ $\quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

3°. $\operatorname{tg} x = a$ $\quad \boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k}$ $\quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

4°. $\operatorname{ctg} x = a$ $\quad \boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k}$ $\quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Մասնավոր դեպքեր (անգիր)

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$ $\qquad \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\qquad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$

$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k$ $\qquad \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\qquad \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k$

Օրինակ $\quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$

Օրինակ $\quad \operatorname{tg} x = -1$ $\quad x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

Օրինակ $\quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

Օրինակ $\quad \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ $\quad x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k = -30° + 180° k$

[illegible]

I Համասեռ հավասարումներ

1°. $a \sin x + b \cos x = 0$ $\quad a \ne 0,\ b \ne 0$

[illegible] $\cos x \ne 0$, [illegible] $\sin x$-ը [illegible] 0, [illegible] $\Longrightarrow$ [illegible] $\cos x$-ի վրա

$\frac{a \sin x + b \cos x}{\cos x} = 0$ կամ $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$

$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi k}$ $\quad k \in Z$

2°. $3\cos^4 x + 5\sin^4 x = 3$ [illegible]

ա) $\cos x \ne 0$, $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$

բ) [illegible] $\cos^4 x$-ի վրա ($\cos x \ne 0$)

$$3 + 5\operatorname{tg}^4 x = \frac{3}{\cos^4 x}$$

$$3 + 5\operatorname{tg}^4 x = 3(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2$$

$$2\operatorname{tg}^4 x - 6\operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

1) $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k$

2) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

Պատ. $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

$3^0.\quad 3\sin x\cdot\cos x - 3\cos^2 x = \cos 2x$ 65

I [illegible]

$3\sin x\cdot\cos x - 3\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$3\sin x\cdot\cos x - 5\cos^2 x = -1$ ([illegible])

$\cos x \neq 0$, [illegible] $\cos^2 x$-[illegible]:

$3\,tg\,x - 5 = -\frac{1}{\cos^2 x}$

$3\,tg\,x - 5 = -(1+tg^2 x)$

$tg^2 x + 3\,tg\,x - 4 = 0$

[illegible] $tg\,x = y$

$y^2 + 3y - 4 = 0$

ա) $y_1 = 1 \Rightarrow tg\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

բ) $y_2 = -4 \Rightarrow tg\,x = -4 \Rightarrow x = arctg(-4) + \pi k$

Պատ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$x = -arctg\,4 + \pi k$

II [illegible]

$\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{3(1+\cos 2x)}{2} = \cos 2x$

$3\sin 2x - 3 - 3\cos 2x = 2\cos 2x$

$3\sin 2x - 5\cos 2x = 3$

$\frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}}\sin 2x - \frac{5}{\sqrt{3^2+5^2}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\frac{3}{\sqrt{34}}\sin 2x - \frac{5}{\sqrt{34}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha\cdot\sin 2x - \cos\alpha\cdot\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$-\cos(2x+\alpha) = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos(2x+\alpha) = -\frac{3}{\sqrt{34}}$, [illegible]

$\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$

$2x + \alpha = \pm\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}\right) + 2\pi k$

$x = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}\right) + \pi k$

Պատ. $x = -\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{\sqrt{34}} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{\sqrt{34}} + \pi k$

(II) [illegible]

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos 3x$ / 2-[illegible]

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \cos 3x$

$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x = \cos 3x$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos 3x = 0$

$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$

ա) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$

$2x - \frac{\pi}{12} = \pi k$

$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{24}(12k+1)$

բ) $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$

$x + \frac{\pi}{12} = \pi k$

$x = \pi k - \frac{\pi}{12}$

(II) [illegible] 7C

$a\sin x + b\cos x = c \qquad a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$

[illegible] $\sqrt{a^2+b^2}$-[illegible]:

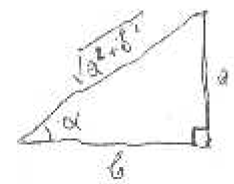
$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\alpha\cdot\sin x + \cos\alpha\cdot\cos x = c_1$

$\cos(x - \alpha) = c_1$

$x - \alpha = \pm\arccos c_1 + 2\pi k$

$x = \alpha \pm \arccos c_1 + 2\pi k$



$\alpha = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[illegible] $\alpha = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Պատ. $x = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \arccos c_1 + 2\pi k$

(III) [illegible]

$a\sin x + b\cos x = c \qquad a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$

[illegible] $tg\frac{x}{2} = y$ ($\cos\frac{x}{2}\neq 0$: $\cos\frac{x}{2} = 0$ [illegible])

$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2ay}{1+y^2} + \frac{b(1-y^2)}{1+y^2} = c \Rightarrow 2ay + b - by^2 = c + cy^2$ [illegible]

$(b+c)y^2 + 2ay - (b-c) = 0$ [illegible]

[illegible]

$3\sin 2x - 5\cos 2x = 3$ [illegible] $\cos x \neq 0$

[illegible] $tg\,x = y \Rightarrow \sin 2x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos 2x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

$\frac{6y}{1+y^2} - \frac{5(1-y^2)}{1+y^2} = 3$

$y^2 + 3y - 4 = 0$

$y_1 = -4$ ա) $tg\,x = -4 \quad x = arctg(-4) + \pi k$

$y_2 = 1$ բ) $tg\,x = 1 \quad x = arctg\,1 + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Պատ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$x = arctg(-4) + \pi k$

[illegible]

1) [illegible]

$$\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2 x+\cos^2\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1+\cos x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 3x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$$

$$2\cos 2x\cdot\cos x+\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(2\cos x+1)=0$$

ա) $\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

$x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$

բ) $2\cos x+1=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\arccos(-\frac{1}{2})+2\pi k=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ

I. ՈՐՈՇՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹ (նշանակվում է $D(y)$-ով)

ա) $y=f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը այն x արգումենտի (կամ փոփոխականի) բոլոր արժեքների բազմությունն է։

բ) y-ի ընդունած արժեքների բազմությունը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմություն կամ փոփոխման տիրույթ։ Նշանակվում է $E(y)$-ով։

Օրինակ. Գտնել $y=\frac{\sqrt{3-|x|}}{1+\lg(-x)}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը։

Լուծում.

$$D(y):\begin{cases}-x>0\\3-|x|\geq 0\\1+\lg(-x)\neq 0\end{cases}\quad\begin{cases}x<0\\|x|\leq 3\\\lg(-x)\neq -1\end{cases}\quad\begin{cases}x<0\\-3\leq x\leq 3\\x\neq -1/10\end{cases}$$

Պատ.՝ −3, −1/10, 0, 3

$x\in[-3;-1/10)\cup(-1/10;0)$

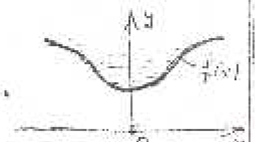
II. ԶՈՒՅԳՈՒԹՅՈՒՆ, ԿԵՆՏՈՒԹՅՈՒՆ

$\forall x\in D(f)$ $-x\in D(f)$

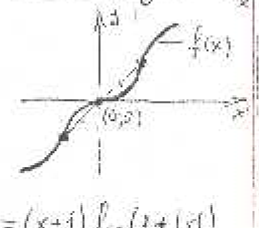
ա) $y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է զույգ, եթե $f(-x)=f(x)$

բ) $y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է կենտ, եթե $f(-x)=-f(x)$

Դիտողություն. ա) Զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ։



բ) Կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է (0;0) կոորդ. սկզբնակետի նկատմամբ։



Օրինակ. $y=|1+x|-|1-x|$

$f(-x)=|1-x|-|1+x|=-(|1+x|-|1-x|)=-f(x)\Rightarrow$ կենտ է։

Օրինակ.

$y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\sin^3x$	$y=\frac{1-x^2}{1+\lvert x\rvert}+\lvert\operatorname{tg}x\rvert$	$y=(x+1)\ln(1+\lvert x\rvert)$
$f(-x)=-\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\sin^3x\right)=-f(x)$ կենտ է	$f(-x)=\frac{1-x^2}{1+\lvert x\rvert}+\lvert\operatorname{tg}x\rvert=f(x)$ զույգ է	$f(-x)=(1-x)\ln(1+\lvert x\rvert)$ ոչ զույգ ոչ կենտ

III. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

$y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե գոյություն ունի մի $T\neq0$ թիվ, այնպես, որ $\forall x\in D(f)$ $x\pm T\in D(f)$ և $f(x+T)=f(x)$, $\forall x$, $x\pm T\in D(f)$: Իսկ T-ն կոչվում է ֆունկցիայի պարբերություն:

Դիտողություն Պարզ է, որ եթե T-ն պարբերություն է, ապա $\pm2T$, $\pm3T$, $\pm4T$, ..., կամ nT $(n=\pm1;\pm2,\dots)$ թվերը ևս կլինեն պարբերություններ:

Օրինակ Գտնել $y=\sin\frac{2}{3}x$ ֆունկցիայի ամենափոքր դրական պարբերությունը:

Լուծում Եթե T-ն պարբերություն է $\Rightarrow$ ըստ սահմանման.

$f(x+T)=\sin\frac{2}{3}(x+T)=\sin\frac{2}{3}x=f(x)$ Այս հավասարությունը ճիշտ է բոլոր $\forall x$-ի համար: Վերցնենք $x=0$, կստանանք՝

$\sin\frac{2}{3}(0+T)=\sin 0=0$

$\sin\frac{2}{3}T=0 \Rightarrow \frac{2}{3}T=\pi k \Rightarrow T=\frac{3\pi k}{2}$, $k=\pm1,\pm2,\pm3,\dots$

Երբ $k=0 \Rightarrow T=0$ պարբերություն չէ:

Երբ $k=1 \Rightarrow T=\frac{3\pi}{2}$, բայց $\sin\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\pi\right)=-\sin\frac{2}{3}x\neq\sin\frac{2}{3}x$

$\Rightarrow \frac{3\pi}{2}$-ը պարբերություն չէ:

Երբ $k=2 \Rightarrow T=3\pi$: $\sin\left(\frac{2}{3}(x+3\pi)\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+2\pi\right)=\sin\frac{2}{3}x \Rightarrow 3\pi$-ն պարբերություն է, ընդ որում ամենափոքր դրականը:

Պատ. $T=3\pi$

IV. ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԿԵՏԵՐ

$y=f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն կետերը, որտեղ $f'(x)=0$, կամ գոյություն չունի, կոչվում են կրիտիկական կետեր: Փաստորեն եթե $f'(x_0)=0$, ապա x_0-ն կրիտիկական կետ է:

Դիտողություն Փաստորեն $y=f(x)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը գտնելու համար բավական է լուծել $f'(x)=0$ հավասարումը:

Օրինակ Գտնել $f(x)=1+x^2+\frac{1}{1+x^2}$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:

Լուծում Որոշման տիրույթը՝ $D(y):\{x\in(-\infty;\infty)\}$

$$f'(x)=2x-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x(1+x^2)^2-2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x(x^4+2x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^3(x^2+2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3(x^2+2)}{(1+x^2)^2}$$

Լուծենք $f'(x)=0$ հավասարումը. $\frac{2x^3(x^2+2)}{(1+x^2)^2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^3(x^2+2)=0$: $x^2+2\neq0$ $\forall x \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$

$x=0\in D(y)$ Պատ. $\boxed{0}$-ն կրիտ. կետ է:

V. ՄՈՆՈՏՈՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔԵՐ

Հարևան կրիտիկական կետերի արանքում $y=f(x)$ ֆունկցիան կամ միայն մոնոտոն աճող է, կամ միայն մոնոտոն նվազող: Այդ դեպքում.

ա) եթե $f'(x)>0$՝ մոնոտոն աճող է,

բ) եթե $f'(x)<0$՝ մոնոտոն նվազող:

Օրինակ Գտնել $y=\sin x-\sqrt{3}x$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Լուծում Որոշման տիրույթը՝ $D(y):\{x\in(-\infty;\infty)\}$

$y'=\cos x-\sqrt{3}<0$ երբ $x\in D(y)$, որովհետև $-1\le\cos x\le1$, իսկ $\sqrt{3}>1$: $\Rightarrow$ ամբողջ թվային առանցքի վրա $f(x)$-ը նվազող ֆունկցիա է:

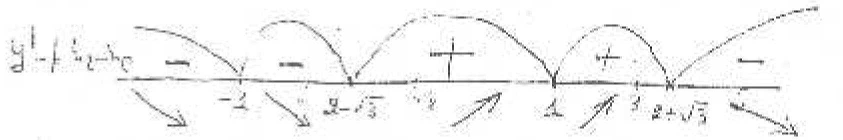
Օրինակ 4. Գտնել $y=\frac{x-2}{x^2-1}$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը։

Լուծում. Որոշման տիրույթը՝ $D(y):\{x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)\}$

$$y'=\frac{x^2-1-2x(x-2)}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$$

$y'=0 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1=2-\sqrt{3},\ x_2=2+\sqrt{3}\ (x_{1,2}\in D(y))$

y'-ը գոյություն չունի, երբ $x=\pm 1 \notin D(y)$



Երբ $x\in(-\infty;-1),\ (-1;2-\sqrt{3}),\ (2+\sqrt{3};\infty)$ նվազող է ↘,

երբ $x\in(2-\sqrt{3};1),\ (1;2+\sqrt{3})$ աճող է ↗։

Օրինակ 5. Ապացուցել, որ $y=\frac{x^4-6x^2+6x-3}{x}$ ֆունկցիան $(0;\infty)$ միջակայքում մոնոտոն աճող է։

Լուծում. Որոշման տիրույթը՝ $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

$$f'(x)=\frac{(4x^3-12x+6)x-x^4+6x^2-6x+3}{x^2}=\frac{3x^4-6x^2+3}{x^2}=\frac{3(x^2-1)^2}{x^2}$$

$f'(x)=\frac{3(x^2-1)^2}{x^2}>0$ միշտ, երբ $x\in(0;\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$-ը $(0;\infty)$-ում մոնոտոն աճող է։

VI. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ (մաքսիմում max և մինիմում min)

Եթե x_0 կրիտիկական կետով անցնելիս y'-ը փոխում է իր նշանը, ապա x_0-ն էքստրեմումի կետ է, ընդ որում.

ա) երբ փոխում է $+$-ից $-$՝ max-ի կետ է ($y(x_0)=y_{max}$)

բ) երբ փոխում է $-$-ից $+$՝ min-ի կետ է ($y(x_0)=y_{min}$)։

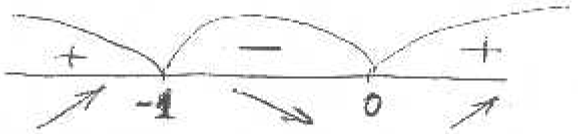
Օրինակ 6. Գտնել $y=\frac{2x^3-1}{x^2}$ ֆունկցիայի էքստրեմումները։

Լուծում. Որոշման տիրույթը՝ $D(y):\{x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)\}$

$$y'=\frac{6x^4-2x(2x^3-1)}{x^4}=\frac{2x^4+2x}{x^4}=\frac{2x(x^3+1)}{x^4}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$$

$y'=0 \Rightarrow 2(x+1)(\underset{D<0}{x^2-x+1})=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$

y'-ը գոյություն չունի ($\nexists$), երբ $x_2=0\notin D(y) \Rightarrow$ էքստրեմումի կետ չէ։



$x_{max}=-1$

$y_{max}=-3$

Պատ.՝ $x=-1$-ը max-ի կետ է։

VII. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ և ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ ($y_{մեծ.}$, $y_{փոք.}$)

$[a;b]$ հատվածում $y_{մեծ.}$, $y_{փոք.}$ գտնելու համար պետք է գտնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի y_{max}-երը, y_{min}-երը, $f(a)$-ն, $f(b)$-ն, ապա դրանցից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը ($y_{մեծ.}$), իսկ ամենափոքրը՝ փոքրագույն արժեքը ($y_{փոք.}$)։

Օրինակ. $[1;10]$ միջակայքում գտնել $y_{մեծ}$-ը և $y_{փոք}$-ը: $y=\frac{x^3}{e^x}$

Լուծում. Որոշման տիրույթը՝ $D(y):\{x\in R\}$

$$y'=\frac{3x^2e^x-x^3e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2e^x(3-x)}{e^{2x}}=\frac{x^2(3-x)}{e^x}$$

$y'=0 \Rightarrow x^2(3-x)=0 \Rightarrow x_1=0\notin[1;10],\ x_2=3\in[1;10]$

$f(3)=\frac{3^3}{e^3}=\frac{27}{e^3}$

$f(1)=\frac{1}{e}$

$f(10)=\frac{1000}{e^{10}}$

$\Rightarrow y_{մեծ}=\frac{27}{e^3},\ y_{փոք}=\frac{1000}{e^{10}}$

Օրինակ 4

Գտնել $f(x)=(x^2-5x+64)\cdot(x-5)^{-1}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $|2x+10|\leq 12$ բազմության վրա

Լուծում

Որոշման տիրույթը՝ $D(y): \{x\in(-\infty;5)\cup(5;\infty)\}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-5x+64}{x-5}\right)'=\frac{(2x-5)(x-5)-x^2+5x-64}{(x-5)^2}=\frac{x^2-10x-39}{(x-5)^2}$$

$y'=0 \Rightarrow x^2-10x-39=0$

$x_{1,2}=5\mp 8 \qquad x_1=-3, \quad x_2=13$

$|2x+10|\leq 12$

$-12\leq 2x+10\leq 12$ կամ $-11\leq x\leq 1 \Rightarrow x\in[-11;1]$

$x_1=-3\in[-11;1]$ իսկ $x_2=13\notin[-11;1]$

$$\left.\begin{aligned} f(-3)&=\frac{(-3)^2-5(-3)+64}{-3-5}=\frac{88}{-8}=-11\\ f(-11)&=\frac{(-11)^2-5(-11)+64}{-11-5}=\frac{240}{-16}=-15\\ f(1)&=\frac{1-5+64}{-4}=\frac{60}{-4}=-15\end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} y_{փոք}&=-15\\ y_{մեծ}&=-11\end{aligned}$$

ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ Բնական արգումենտի ֆունկցիան ($f(n)$, $n \in N$) կոչվում է թվային հաջորդականություն և նշանակվում է

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Օրինակ $\{\frac{1}{n}\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Օրինակ $\{\frac{(-1)^n}{n}\} = -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ թվային հաջորդականությունը կոչվում է թվաբանական պրոգրեսիա, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ ստացվում է իր նախորդից ավելացնելով միևնույն թիվը: Այդ թիվը կոչվում է թվաբ. պրոգ.-ի տարբերություն և նշ. է d-ով:

Այսինքն $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$

1)) a_n-ը կոչվում է թվաբ. պրոգ.-ի ընդհանուր անդամ, որի բանաձևն է՝ $a_n = a_1 + (n-1)d$

2)) Թվաբ. պրոգ.-ի առաջին n անդամների գումարը (նշանակվում է $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$).

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{կամ} \quad S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Հատկությունները ա) $a_n - a_m = (n-m)d$, $n > m$

բ) $a_n = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ միջին թվաբանական

Նկատողություն Երբ $d > 0$ պրոգրեսիան կոչվում է աճող, երբ $d < 0$ — կոչվում է նվազող:

Օրինակ 1313 $a_1, a_2, a_3, \dots$ թվաբ. պրոգ. է, $m + n = k + p$

Ապ. որ $a_m + a_n = a_k + a_p$

$a_m = a_1 + (m-1)d$, $a_n = a_1 + (n-1)d$ $\Rightarrow a_m + a_n = 2a_1 + (m+n-2)d$

$a_k = a_1 + (k-1)d$, $a_p = a_1 + (p-1)d$ $\Rightarrow a_k + a_p = 2a_1 + (k+p-2)d$

Քանի որ $m + n = k + p \Rightarrow a_m + a_n = a_k + a_p$

Օրինակ 1317 $a_1, a_2, \dots$ հաջ. է, $S_n = 5n^2 - 6n$. Ապ. որ հաջ.-ը թվաբ. պրոգ. է:

$S_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 5 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -1$

$a_2 = S_2 - S_1 = (5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2) - (-1) = 9$

$\Rightarrow a_2 - a_1 = 10$

$a_n - a_{n-1} = (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) =$

$= 5n^2 - 6n - 5(n-1)^2 + 6(n-1) - 5(n-1)^2 + 6(n-1) + 5(n-2)^2 - 6(n-2) =$

$= 5n^2 - 6n - 10n^2 + 20n - 10 + 12n - 12 + 5n^2 - 20n + 20 - 6n + 12 = 10$

Ապացուցեցինք որ $a_2 - a_1 = 10$, $a_n - a_{n-1} = 10$, $\forall n$ $\Rightarrow a_1, a_2, \dots$ հաջ.-ը թվաբ. պրոգ. է:

Օրինակ 1344 $a_3 + a_{11} = 13$, $a_4 + a_{10}$ — ?

$a_3 + a_{11} = a_1 + 2d + a_1 + 10d = 2a_1 + 12d = 2(a_1 + 6d) = 13$

$a_4 + a_{10} = a_1 + 3d + a_1 + 9d = 2a_1 + 12d = 2(a_1 + 6d) = 13$

Պատ. 13

Օրինակ 1324 $a_7 = 2x$, $a_{17} = 3x + 1$, $a_{23} = 4x - 1$, x — ?

$\begin{cases} a_{17} - a_7 = 10d \\ a_{23} - a_{17} = 6d \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 1 - 2x = 10d \\ 4x - 1 - 3x - 1 = 6d \end{cases}$ $\begin{cases} x - 10d = -1 \\ x - 6d = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} d = \frac{3}{4} \\ x = \frac{13}{2} \end{cases}$

Պատ. $\frac{13}{2}$

1024 Գտնել 700-ից փոքր այն բնական թվերի գումարը, որոնք 7-ի բաժանելիս տալիս են 3 մնացորդ: S_n — ?

$a_1 = 10$, $a_2 = 17$, $a_3 = 24, \dots$ թվաբ. պր. է, $a_n = 696$, $d = 7$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 10 + (n-1) \cdot 7 = 696$

$n = \frac{696 - 10}{7} + 1 = \frac{693}{7} = 99$

$S_{99} = \frac{a_1 + a_{99}}{2} \cdot 99 = \frac{10 + 696}{2} \cdot 99 = 353 \cdot 99$

Երկրաչափական պրոգրեսիա

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ թվային հաջորդականությունը կոչվում է երկրաչափական պրոգրեսիա, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ սկսած 2-րդից հավասար է նախորդի և միևնույն թվի արտադրյալին, որը կոչվում է երկրաչ. պրոգր.-ի հայտարար և նշ. է q-ով:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q \Rightarrow b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Հատկություն Երբ $q > 1$ — աճող է, Երբ $0 < q < 1$ — նվազող է | $q \neq 0$, $q \neq 1$

Ընդհանուր անդամի (b_n-ի) բանաձևը

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Առաջին n անդամների գումարը ($S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$)

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{կամ} \quad S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$$

Հատկություն

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$$ միջին երկրաչափականը

ԱՆՎԵՐՋ ՆՎԱԶՈՂ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱ

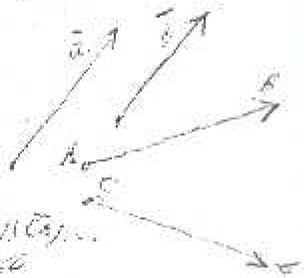
Երբ $q < 1$, ապա $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան կոչվում է անվերջ նվազող երկր. պրոգրեսիայի գումարը (սահմ) հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

7

[illegible]

[illegible]



[illegible] $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ [illegible] $(\overline{AB})$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\bar{a}$ [illegible] $\bar{c}$ [illegible] $(\bar{a}, \bar{b} \parallel \bar{c})$

[illegible] $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ [illegible]

[illegible] $\bar{a}$ [illegible]

[illegible] x, y, z [illegible] $\bar{a}$ [illegible]

$\bar{a}(x; y; z)$ [illegible] $\bar{a} = \{x; y; z\}$

[illegible] $A(x_1; y_1; z_1)$ [illegible] $\bar{a} = \overline{AB}$ [illegible] $B(x_2; y_2; z_2)$ [illegible] $\bar{a}$ [illegible]

$x = x_2 - x_1$

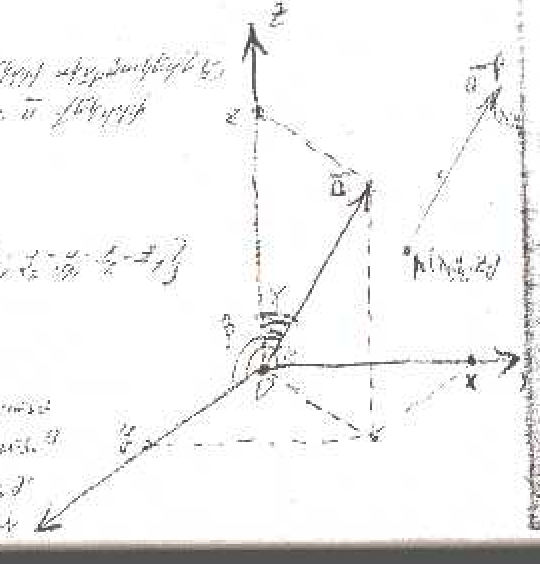
$y = y_2 - y_1$ [illegible] $\bar{a} = \overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$z = z_2 - z_1$

[illegible] $x = |\bar{a}| \cos\alpha$

$y = |\bar{a}| \cos\beta$

$z = |\bar{a}| \cos\gamma$



[illegible] $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ [illegible]

$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

[illegible] $A(x_1; y_1; z_1)$ [illegible] $B(x_2; y_2; z_2)$ [illegible] $|\overline{AB}|$ [illegible]

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

[illegible] AB [illegible]

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

[illegible]

1° [illegible] $\lambda \in R$ [illegible] $\bar{a}(x; y; z)$ [illegible] $\lambda \bar{a} = \{\lambda x; \lambda y; \lambda z\}$

[illegible] $\lambda > 0$ [illegible] $\bar{a}$ [illegible] $\lambda \bar{a}$ [illegible]

[illegible] $\lambda < 0$ [illegible] $\bar{a}$ [illegible] $\lambda \bar{a}$ [illegible]

[illegible] $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ [illegible] $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$

[illegible] $\Longleftrightarrow$ $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ $(\lambda \in R)$ [illegible]

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

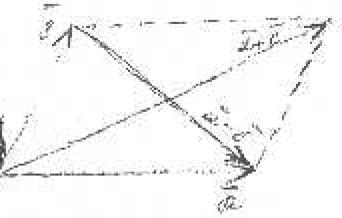
[illegible]

2° [illegible]

[illegible] $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$

$\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$

[illegible] $\bar{a} \pm \bar{b} = \{x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2\}$



[illegible]

[illegible] $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ [illegible]

[illegible] $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ [illegible] $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, [illegible] $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ [illegible]

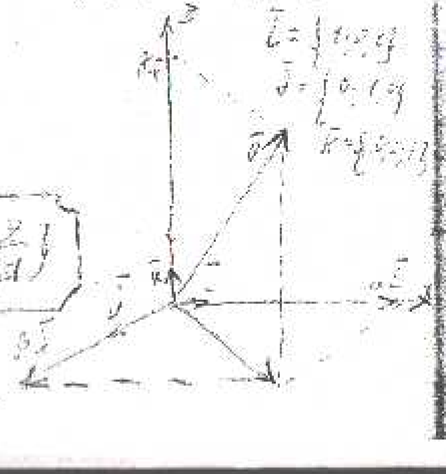
[illegible] $|\bar{e}| = 1$

[illegible] $\bar{a}^{\circ}$

[illegible] $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$

[illegible] $\bar{a} = \{x; y; z\}$ [illegible]

$$\bar{a}^{\circ} = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \left\{ \frac{x}{|\bar{a}|}; \frac{y}{|\bar{a}|}; \frac{z}{|\bar{a}|} \right\}$$



[illegible] $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ [illegible]

$$\bar{a} = \alpha \cdot \bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k}$$, [illegible]

[illegible] $\bar{a} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ [illegible]

$\bar{a} = \{x; y; z\}$; $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$

[illegible]

[illegible] $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ [illegible]

$\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ [illegible]

[illegible] $\bar{a}$ [illegible] $\bar{b}$ [illegible]

[illegible] $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}$

[illegible]

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot пр_{\bar{b}} \bar{a}$ [illegible] $= |\bar{a}| \cos \bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}$ [illegible]

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot пр_{\bar{a}} \bar{b}$ [illegible] $= |\bar{b}| \cos \bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}$

[illegible]

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

2) [illegible]

3) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

4) $\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b} < 90° \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} > 0$; $\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b} > 90° \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} < 0$ [illegible]

8. [illegible] (1), 2), 3) [illegible]

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

[illegible]

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

[illegible]

$$\cos\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ [illegible] } \cos\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

[illegible]

$\vec{c} = \{-136;\ 15\}$

$10\vec{a} = \vec{c} + 10\vec{b}$

$\vec{b} = \{2y-15;\ x+20{,}6\}$

$\vec{a} = \{x; y\}$ —— ?

$10\vec{a} = \{10x;\ 10y\}$

$10\vec{b} = \{20y-150;\ 10x+206\}$

$\vec{c} + 10\vec{b} = \{20y-286;\ 10x+221\}$

$10\vec{a} = \vec{c} + 10\vec{b} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 10x = 20y - 286 \\ 10y = 10x + 221 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 10y = -143 \\ 10x - 10y = -221 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -78/5 \\ y = 6{,}5 \end{cases}$$

Պ.: $\vec{a} = \{-\frac{78}{5};\ 6{,}5\}$

269

$\vec{a} = \{4x+1;\ x-1;\ 2+x\}$

$\vec{b} = \{-1;\ x;\ x+1\}$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

x — ?

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ [illegible]

$$\frac{4x+1}{-1} = \frac{x-1}{x} = \frac{2+x}{x+1}$$

$$\begin{cases} \frac{4x+1}{-1} = \frac{x-1}{x} \\ \frac{x-1}{x} = \frac{2+x}{x+1} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+2x-1 = 0 \\ 2x+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = [illegible] \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Պ.: (3)

272

$|\vec{b}| = 9,\ \vec{b} \parallel \vec{a}$

$\vec{a} = \{2\sqrt{2};\ -1\}$

$\vec{b} = \{x; y\}$ — ?

$\vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ $(\vec{a} = \lambda\vec{b})$ [illegible]

$$\begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{y}{-1} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{x^2}{8} \\ x^2 + \frac{x^2}{8} = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 9 \\ x^2 = 72 \end{cases}$$

$y_{1,2} = \pm 3$

$x_{1,2} = \pm 6\sqrt{2}$

Պ.: $\vec{b} = \{3;\ 6\sqrt{2}\}$ $\vec{b} = \{-3;\ 6\sqrt{2}\}$ $\vec{b} = \{3;\ -6\sqrt{2}\}$ $\vec{b} = \{-3;\ -6\sqrt{2}\}$

275

$\vec{a} = \{-\sqrt{5};\ 2\}$

$\vec{b} = \{x;\ -2\sqrt{5}\}$

$\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = \arccos(-\frac{4\sqrt{5}}{9})$

x — ?

$$\cos\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5+4}\cdot\sqrt{x^2+20}} = \frac{-\sqrt{5}(x+4)}{3\sqrt{x^2+20}}$$

$$\frac{-\sqrt{5}(x+4)}{3\sqrt{x^2+20}} = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow 3x+12 = 4\sqrt{x^2+20}$$

$9x^2 + 72x + 144 = 16x^2 + 320$

$7x^2 - 72x + 176 = 0$

$x_{1,2} = \frac{36 \pm 8}{7}$

$x_1 = 4$

$x_2 = \frac{44}{7}$

Պ.: 4; $\frac{44}{7}$

217

$\vec{b} = \{12; -16; 15\}$, $|\vec{a}| = 10$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}\wedge\vec{k} < 90^\circ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{k} > 0$

$\vec{a} = \{x; y; z\}$ — ?

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{-16} = \frac{z}{15}$; $|\vec{a}| = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 10$; $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x, \ z = \frac{5}{4}x \\ x^2 + \frac{16}{9}x^2 + \frac{25}{16}x^2 = 100 \end{cases}$

$144x^2 + 256x^2 + 225x^2 = 14400$

$625x^2 = 14400$

$x_{1,2} = \pm\frac{120}{25} = \pm\frac{24}{5}$

$y_{1,2} = \mp\frac{32}{5}$, $z_{1,2} = \pm 6$

1) $\vec{a} = \{\frac{24}{5}; -\frac{32}{5}; 6\}$, $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ | $\vec{a}\cdot\vec{k} = \frac{24}{5}\cdot 0 - \frac{32}{5}\cdot 0 + 6\cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow$ fits

2) $\vec{a} = \{-\frac{24}{5}; \frac{32}{5}; -6\}$ | $\vec{a}\cdot\vec{k} = -\frac{24}{5}\cdot 0 + \frac{32}{5}\cdot 0 - 6\cdot 1 = -6 < 0 \Rightarrow$ does not fit

Answer: $\vec{a} = \{\frac{24}{5}; -\frac{32}{5}; 6\}$

218

$\vec{a} \parallel \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$

$|\vec{a}+\vec{b}|$ — ?, $|\vec{a}-\vec{b}|$ — ?

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} =$
$= \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) + |\vec{b}|^2} =$
$= \sqrt{9 + 36 + 36} = 3$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} =$
$= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \sqrt{9 - 36 + 36} = 3$

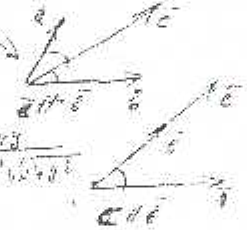
Answer: $|\vec{a}+\vec{b}| = 3$
$|\vec{a}-\vec{b}| = 3$

220

$\vec{b} = \{3; 4\}$, $\vec{c} = \{-4; 3\}$, $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$, $\vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{b}$

$\vec{a} = \{x; y\}$ — ?

$\frac{3}{-4} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \vec{c} \nparallel \vec{b}$ [illegible]



$\cos\vec{a}\wedge\vec{c} = \frac{-4x+3y}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{3x+4y}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{-4x+3y}{5\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3x+4y}{5\sqrt{x^2+y^2}}$

$\begin{cases} y = -7x \\ \sqrt{x^2+y^2} = 5\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = -7x \\ x^2 + 49x^2 = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} y_{1,2} = \mp 7 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$ Answer: $(1; -7)$, $(-1; 7)$

221

$\vec{a} = \{1; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -1\}$, $2\vec{p} + \vec{q} = \vec{a}$, $\vec{p} + 2\vec{q} = \vec{b}$

$\vec{p}\wedge\vec{q}$ — ?

$\vec{p} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{q} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a})$ | $\cos\vec{p}\wedge\vec{q} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$

$\vec{p} = \frac{1}{3}\{1; 3\} = \{\frac{1}{3}; 1\}$

$\vec{q} = \frac{1}{3}\{1; -3\} = \{\frac{1}{3}; -1\}$

$|\vec{p}| = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $|\vec{q}| = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\Rightarrow$

$\vec{p}\cdot\vec{q} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot(-1) = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$

$\Rightarrow \cos\vec{p}\wedge\vec{q} = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}} = -\frac{8\cdot 9}{9\cdot 10} = -\frac{4}{5}$

[illegible]

Երկրաչափական պրոգրեսիա

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ թվային հաջորդականությունը կոչվում է երկրաչափական պրոգրեսիա, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ սկսած երկրորդից [illegible] հավասար է նախորդի և միևնույն թվի արտադրյալին, որը կոչվում է երկրաչ. պրոգ.-ի հայտարար և նշ. է q-ով:

Այսինքն՝

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q \Rightarrow b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Միապաղաղություն

Երբ $q > 1$ — աճող է
Երբ $0 < q < 1$ — նվազող է

$q \neq 0$, $q \neq 1$

1) Ընդհանուր անդամի (b_n-ի) բանաձևը

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

2) Առաջին n անդամների գումարը ($S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$)

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{կամ} \quad S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$$

Հատկություն

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$$

Դրական երկրաչափական...

ԱՆՎԵՐՋ ՆՎԱԶՈՂ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱ

Երբ $q < 1$, ապա $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան կոչվում է <u>անվերջ նվազող</u> երկր. պրոգրեսիա, որի գումարը (սահմանը) հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$